KOLOKWIUM nr 11, 4.01.2016, godz. 14.15-15.00

Zadanie **20. (10 punktów)**

Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4,5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}=\frac{4x^2-36x+81}{4x^3}=\frac{(2x-9)^2}{4x^3}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funckji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(4)=\frac{207}{128}+\ln 4\approx 3{,}00348\,,$$

$$f(9/2)=\frac{3}{2}+\ln(9/2)\approx 3{,}00408\,,$$

$$f(5)=\frac{279}{200}+\ln 5\approx 3{,}00444\,.$$

Zadanie **21.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-12\right|$$

na przedziale $[-5,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2-x-12=(x-4)\cdot(x+3)\,.$$

Stąd

$$\left|x^2-x-12\right|=\begin{cases} x^2-x-12 & \text{dla } x\in(-\infty,-3]\cup[4,+\infty) \\ -x^2+x+12 & \text{dla } x\in(-3,4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-12 & \text{dla } x\in[-5,-3]\cup[4,5] \\ -x^2+2x+12 & \text{dla } x\in(-3,4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla } x\in(-5,-3)\cup(4,5) \\ -2x+2 & \text{dla } x\in(-3,4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,-3)\cup(4,5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5,-3)\cup(4,5)$.

2° W przypadku $x\in(-3,4)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4.

$$f(-5)=13\,,$$

$$f(-3)=-3\,,$$

$$f(1)=13\,,$$

$$f(4)=4\,,$$

$$f(5)=13\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3, a wartość największą równą 13 w punktach -5, 1 i 5.