KOLOKWIUM nr 13, 18.01.2016, godz. 14.15-15.05

Zadanie **23. (12 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}},$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczymy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez c_n.

$$b_n\leqslant\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}=c_n\,.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez a_n.

$$b_n\geqslant\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}}=a_n\,.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}}=\frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\left(1+n^{-1}\right)^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}}=\frac{3}{7}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{7}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{7}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3/7.

Zadanie **24. (12 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$

na przedziale $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3-9x=(x-3)\cdot x\cdot(x+3)\,.$$

Stąd

$$\left|x^3-9x\right|=\begin{cases} x^3-9x & \text{dla } x\in[-3,0]\cup[3,+\infty) \\ -x^3+9x & \text{dla } x\in(-\infty,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x & \text{dla } x\in[-3,0]\cup\left[3,\sqrt{10}\right] \\ -x^3+12x & \text{dla } x\in[-4,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6 & \text{dla } x\in(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right) \\ -3x^2+12 & \text{dla } x\in(-4,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$

W punktach -3, 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=6$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=-\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right)$.

2° W przypadku $x\in(-4,-3)\cup\in(0,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=12$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=2$, należy do rozważanego zbioru $(-4,-3)\cup\in(0,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:

- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3, 0 i 3.

$$f(-4)=16\,,\quad f(-3)=-9\,,\quad f(0)=13\,,\quad f(2)=16\,,\quad f(3)=9\,,$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\cdot\sqrt{2}=-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\in(4,8),\quad \text{bo}\quad \sqrt{2}\in(1,2)\,,$$

$$f\left(\sqrt{10}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^3-6\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{10}-6\cdot\sqrt{10}=4\cdot\sqrt{10}\in(12,16),\quad \text{bo}\quad \sqrt{10}\in(3,4)\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3, a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2.