KOLOKWIUM nr 1, 12.10.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **1.** **(10 punktów)**

Przy każdym z poniższych 18 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:
P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)
F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)
N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0, n-8)$ **punktów.**

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$,
- implikacja $T(100) \Rightarrow T(10)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(1)$ . . . **F**

b) $T(9)$ . . . **F**

c) $T(11)$ . . . **N**

d) $T(99)$ . . . **N**

e) $T(101)$ . . . **P**

f) $T(999)$ . . . **P**

g) $T(5) \Rightarrow T(55)$ . . . **P**

h) $T(77) \Rightarrow T(7)$ . . . **N**

i) $T(5) \Rightarrow T(555)$ . . . **P**

j) $T(777) \Rightarrow T(7)$ . . . **F**

k) $T(55) \Rightarrow T(555)$ . . . **P**

l) $T(777) \Rightarrow T(77)$ . . . **N**

m) $T(4) \Rightarrow T(6)$ . . . **P**

n) $T(8) \Rightarrow T(3)$ . . . **P**

o) $T(44) \Rightarrow T(66)$ . . . **P**

p) $T(88) \Rightarrow T(33)$ . . . **N**

q) $T(444) \Rightarrow T(666)$ . . . **P**

r) $T(888) \Rightarrow T(333)$ . . . **P**

Zadanie **2. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=4^1=4 .$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n . \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n+1} \leqslant 4^{n+1} . \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{2n+2}{n} = \frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!} .$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z załozenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!\cdot(n+3)!} = \frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!}\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)} \leqslant$$

$$\leqslant 4^n\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)} \leqslant 4^n\cdot 4 = 4^{n+1} = P ,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)} \leqslant 4 . \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+3)\cdot(2n+4) \leqslant 4\cdot(n+1)\cdot(n+3) ,$$

$$(2n+3)\cdot(n+2) \leqslant 2\cdot(n+1)\cdot(n+3) ,$$

$$2n^2+7n+6 \leqslant 2n^2+8n+6 ,$$

$$0 \leqslant n ,$$

a zatem nierówność (♡) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (♣) wynika nierówność (♢).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Idea rozwiązania:

Wykażemy, że lewa strona dowodzonej nierówności, czyli liczba $\binom{2n+2}{n}$, jest sumą **czterech** liczb występujących w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala (rozszerzonego do dolnej półpłaszczyzny umownymi zerami). Z kolei prawa strona dowodzonej nierówności jest sumą **wszystkich** wyrazów tego wiersza. Ponieważ wyrazy trójkąta Pascala są nieujemne, suma kilku wyrazów jednego wiersza nie przekracza sumy wszystkich wyrazów tego wiersza.

Rozwiązanie właściwe:

Korzystając ze wzorów

$$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k} \qquad \text{oraz} \qquad \binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$$

otrzymujemy

$$\binom{2n+2}{n}=\binom{2n+1}{n-1}+\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}=$$

$$=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=n-2}^{n+1}\binom{2n}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=2^{2n}=4^n\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwagi:

Dla $n=1$ składnik $\binom{2n}{n-2}=\binom{2}{-1}$ jest legalny i ma wartość 0.

Podobnie, poprawnym, choć może nieco dziwnym sposobem zapisania sumy $\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ jest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\binom{2n}{k}\,.$$

Jeśli ktoś się brzydzi rozszerzaniem trójkąta Pascala przez wypełnienie dolnej półpłaszczyzny zerami, może po prostu sprawdzić prawdziwość dowodzonej nierówności dla $n=1$, a dalszą część rozumowania przeprowadzić dla $n\geqslant 2$ jak wyżej, bez konieczności odwoływania się do wyrazów rozszerzonego trójkąta Pascala równych 0.