KOLOKWIUM nr 2, 19.10.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **3. (10 punktów)**
Dowieść, że liczba $\log_{30}60$ jest niewymierna.
Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{30}60$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{30}60=\frac{m}{n}$$

$$30^{m/n}=60$$

$$30^m=60^n\,.$$

Dalszą część dowodu, polegającą na wykazaniu, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych, można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób A:

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m\cdot 3^m\cdot 5^m=2^{2n}\cdot 3^n\cdot 5^n\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m &= 2n \\ m &= n \\ m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż wówczas mielibyśmy

$$m=2n>n=m\,.$$

Możliwa jest też inna argumentacja: rozwiązujemy powyższy układ równań w liczbach rzeczywistych otrzymując jedyne rozwiązanie $m=n=0$ i stwierdzamy, że nie jest to rozwiązanie w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30}60$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30}60$ jest niewymierna.

Sposób B:

Ponieważ dowolna potęga liczby 30 ma ostatnią niezerową cyfrę 1, 3, 7 lub 9, a w potęgach liczby 60 ostatnia niezerowa cyfra jest równa 6, równanie $30^m=60^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30}60$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30}60$ jest niewymierna.

Sposób II:

Z równości

$$\log_{30}60=1+\log_{30}2=1+\frac{1}{\log_2 30}=1+\frac{1}{1+\log_2 15}$$

wnioskujemy, że liczba $\log_{30}60$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\log_2 15$ jest wymierna. Zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy niewymierność liczby $\log_2 15$, co udowodnimy przeprowadzając dowód nie wprost.

Załóżmy, że liczba $\log_2 15$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 15=\frac{m}{n}$$

$$2^{m/n}=15$$

$$2^m=15^n\,. \qquad (\spadesuit)$$

Jednak powyższa równość nie może mieć miejsca, gdyż jej lewa strona jest liczbą parzystą, a prawa nieparzystą.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_2 15$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 15$ jest niewymierna, a w konsekwencji niewymierna jest także liczba $\log_{30}60$.

Uwaga:

Podany wyżej argument wydaje się najprostszym uzasadnieniem, że równanie ($\spadesuit$) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Inne możliwe uzasadnienia to na przykład:

- prawa strona jest podzielna przez 3, a lewa nie,
- prawa strona jest podzielna przez 5, a lewa nie,
- prawa strona jest zakończona cyfrą 5, a lewa jedną z cyfr 2, 4, 6, 8.

Zadanie **4.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **4.1–4.9** wskaż taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna. Za podanie n poprawnych odpowiedzi w zadaniach **4.1–4.9** otrzymasz $\mathbf{max(0,n-4)}$ **punktów.**

4.1. Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{-1}$

4.2. Liczba $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{1}$

4.3. Liczba $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{-1}$

4.4. Liczba $\sqrt[2014]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2014}}+w\cdot\sqrt{3}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{1}$

4.5. Liczba $\sqrt[2015]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2015}}+w\cdot\sqrt{3}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{-1}$

4.6. Liczba $\sqrt[2016]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2016}}+w\cdot\sqrt{3}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{1}$

4.7. Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^6}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{-5}$

4.8. Liczba $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^9}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{5}$

4.9. Liczba $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{12}}+w\cdot\sqrt{2}$ jest wymierna dla $w=\mathbf{-5}$

W zadaniach **4.10–4.13** wpisz w miejsce kropek takie liczby naturalne, aby otrzymać równość prawdziwą dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k i dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant k+4$. Otrzymasz po **1 punkcie** za każde poprawnie rozwiązane zadanie i **piąty punkt** za komplet poprawnych odpowiedzi w zadaniach **4.10–4.13**.

4.10. $\binom{n+4}{k+4}=\binom{n+1}{k+1}+\mathbf{3}\cdot\binom{n+1}{k+2}+\mathbf{3}\cdot\binom{n+1}{k+3}+\binom{n+1}{k+4}$

4.11. $\binom{n+4}{k+4}=\binom{n+1}{k+1}+\mathbf{3}\cdot\binom{n+1}{k+2}+\mathbf{3}\cdot\binom{n}{k+2}+\mathbf{4}\cdot\binom{n}{k+3}+\binom{n}{k+4}$

4.12. $\binom{n+4}{k+4}=\binom{n+1}{k+1}+\mathbf{3}\cdot\binom{n}{k+1}+\mathbf{6}\cdot\binom{n}{k+2}+\mathbf{4}\cdot\binom{n}{k+3}+\binom{n}{k+4}$

4.13. $\binom{n+4}{k+4}=\binom{n}{k}+\mathbf{4}\cdot\binom{n}{k+1}+\mathbf{6}\cdot\binom{n}{k+2}+\mathbf{4}\cdot\binom{n}{k+3}+\binom{n}{k+4}$