KOLOKWIUM nr 3, 26.10.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **5. (10 punktów)**

W każdym z dziesięciu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50} ,10^{100}, 10^{200}, 10^{500} ,10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za każde zadanie, które rozwiążesz poprawnie, otrzymasz **1 punkt.**

5.1 $$100 < 3^{10} < 10^5$$

5.2 $$10^{20} < 3^{10^2} < 10^{50}$$

5.3 $$10^{2000} < 3^{10^4} < 10^{5000}$$

5.4 $$10^5 < 5^{10} < 10^{10}$$

5.5 $$10^{50} < 5^{10^2} < 10^{100}$$

5.6 $$10^{5000} < 5^{10^4} < 10^{10000}$$

5.7 $$10^5 < 2000^3 < 10^{10}$$

5.8 $$10^{500} < 2000^{300} < 10^{1000}$$

5.9 $$10^{50} < 2^{2^{2^3}} < 10^{100}$$

5.10 $$10^{100} < 2^{2^{3^2}} < 10^{200}$$

Zadanie **6. (10 punktów)**

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leqslant 4C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} < \frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}} < \frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}} = \frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}} = 5n^{1/6}\,.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} > \frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0} = \frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}} > \frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}} = \frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}} = \frac{5n^{1/6}}{4}\,.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi $C=5/4$ i $k=1/6$.

Uwagi:

Liczba $k=1/6$ jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość k, jest błędne.

Stała C wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą C.

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).