KOLOKWIUM nr 4, 9.11.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **7. (10 punktów)**

Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{333}\cdot\left(\sqrt{1+n^{-666}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=333$. Dla $k=333$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=333$ dana w zadaniu granica ma wartość 1/2.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leqslant 32C\,.$$

Pomoc dla osób mniej biegłych rachunkowo: $255=15\cdot 17=3\cdot 5\cdot 17$ oraz $256=2^8=16\cdot 16=8\cdot 32$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,,$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)} =$$

$$=\frac{255n^7}{17n\cdot 5n^2\cdot 3n^4}=\frac{255n^7}{255n^7}=1$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)} =$$

$$=\frac{255n^7}{2n\cdot 2n^2\cdot 2n^4}=\frac{255n^7}{8n^7}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie ($\diamondsuit$) przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)}=a_n\,.$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{k\to\infty} a_k\,. \qquad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1=\sqrt[8]{1+255}-1=2-1=1$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{255}{2\cdot2\cdot2}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,,$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:

Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności ($\clubsuit$), to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.