KOLOKWIUM nr 51, 3.11.2015, godz. 14.30-16.45

Zadanie **51. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n}>9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$L=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}=6\cdot\binom{2}{1}=6\cdot 2=12$$

oraz

$$P=9\cdot 4^{n-1}=9\cdot 4^0=9\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $12>9$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n}>9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1}>9\cdot 4^{n}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+6)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+6)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+6)(2n+1)(2n+2)}{(n+5)(n+1)^2}=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}>$$

$$>9\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 9\cdot 4^{n-1}\cdot 4=9\cdot 4^n\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+6)(2n+1)\geqslant 4(n+5)(n+1)\,,$$

$$(n+6)(2n+1)\geqslant 2(n+5)(n+1)\,,$$

$$2n^2+n+12n+6\geqslant 2\left(n^2+n+5n+5\right)\,,$$

$$2n^2+13n+6\geqslant 2n^2+12n+10\,,$$

$$n\geqslant 4\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ i $n=3$ oraz dla $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ i $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$L=7\cdot\binom{4}{2}=7\cdot 6=42 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^1=36\,,$$

skąd $L>P$.

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$L=8\cdot\binom{6}{3}=8\cdot 20=160 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^2=144\,,$$

skąd $L>P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=4$ otrzymujemy

$$L=9\cdot\binom{8}{4}=9\cdot 70 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^3=9\cdot 64\,,$$

skąd $L>P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$, $n=2$ i $n=3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} \geqslant 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} > 4\,, \qquad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=5$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n=4$, to 4 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n=5$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ($\spadesuit$)), że została udowodniona implikacja $T(4) \Rightarrow T(5)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Również rozwiązanie, w którym, nawet z powodu drobnego błędu rachunkowego, nie wykryto, że indukcja nie działa od samego początku, nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**, gdyż wówczas rozwiązujący stracił możliwość wykazania, że wie, co zrobić w przypadku indukcji startującej od $n=4$.

Zadanie **52. (10 punktów)**

Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $q^q=16$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że taka liczba q istnieje i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m/n}=16\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m}=16^n\,,$$

$$m^m=16^n\cdot n^m\,. \qquad (\heartsuit)$$

Dowód zostanie zakończony, jeżeli wykażemy, ze równanie $(\heartsuit)$ nie może być spełnione przez względnie pierwsze liczby naturalne m, n. Tę część dowodu można przeprowadzić różnymi sposobami.

Sposób I (najprostszy):

Liczba n nie może być równa 1, gdyż w takim przypadku równanie $(\heartsuit)$ przyjęłoby postać $m^m=16$, skąd wobec $2^2<16<3^3$ mielibyśmy $2<m<3$.

Zatem liczba n, jako liczba naturalna większa od 1, ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p. Wówczas prawa strona równości $(\heartsuit)$ jest podzielna przez p, a zatem lewa strona też jest podzielna przez p. Skoro jednak liczba m^m jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to także m jest podzielne przez p, co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Sposób II (jeśli ktoś się zapatrzy na liczbę $16=2^4$ i nie dostrzeże sposobu I):

Ponieważ prawa strona równania $(\heartsuit)$ jest podzielna przez 2, to i lewa strona też jest podzielna przez 2, a w konsekwencji liczba m jest parzysta, a względnie pierwsza z nią liczba n jest nieparzysta. Niech k będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu liczby m na iloczyn potęg liczb pierwszych. Porównując wykładniki, z jakimi dwójka występuje po obu stronach równości $(\heartsuit)$ otrzymujemy

$$km=4n, \quad \text{skąd} \quad \frac{m}{n}=\frac{4}{k}\,.$$

Wobec nierówności $m>n$ musi być $k\leqslant 3$, skąd para (m,n) jest jedną z par $(4,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$ (odpowiednio dla $k=1,2,3$).

To zostawia trzy potencjalne wartości q mogące spełniać daną w treści zadania równość, a mianowicie $q=4$, $q=2$ i $q=4/3$. Jednak bez trudu sprawdzamy, że żadna z tych liczb nie spełnia równania $q^q=16$, np. dlatego, że żadna nie wpada do przedziału $(2,3)$.

Zadanie **53. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}=\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\leqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 4n\cdot 10n^2}{10n\cdot 80n^2}=\frac{11}{20}$$

i od dołu

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\geqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11n^2}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 2n\cdot 2n^2}{11n\cdot 80n^2}=\frac{1}{20}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1/20$.

Zadanie **54. (10 punktów)**
Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n^{12}\cdot(n+1)^{12}>(n-1)^{11}\cdot(n+2)^{11}\cdot\left(n^2+n+22\right).$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy daną nierówność w postaci

$$\left(n^2+n\right)^{12}>\left(n^2+n-2\right)^{11}\cdot\left(n^2+n+22\right)$$

i zauważamy, że w otrzymanej nierówności po każdej ze stron znajduje się iloczyn dwunastu czynników nieujemnych o takiej samej sumie równej $12n^2+12n$.

Zgodnie z przeformułowaniem nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, iloczyn ustalonej liczby czynników nieujemnych o ustalonej sumie jest największy, gdy wszystkie jego czynniki są równe. Stąd wynika prawdziwość dowodzonej nierówności.

Zadanie **55.** **(10 punktów)**

W każdym z pięciu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za każde zadanie, które rozwiążesz poprawnie, otrzymasz **2 punkty.**

a) $$10^{100} < \binom{10^{12}}{10} < 10^{200}$$

b) $$10^{100} < \binom{10^{20}}{10} < 10^{200}$$

c) $$10^{100} < \binom{10^{8}}{25} < 10^{200}$$

d) $$10^{200} < \sum_{n=1}^{1000} 2^n < 10^{500}$$

e) $$10^{2000} < \sum_{n=1}^{100} 2^{n^2} < 10^{5000}$$

Zadanie **56.** **(10 punktów)**

Przy każdym z poniższych 26 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0,n-16)$ **punktów.**

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n^3)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n>5$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-5)$,
- implikacja $T(666)\Rightarrow T(55)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(1)$ **P** | **b)** $T(2016)$ **P**

c) $T(2)$ **N** | **d)** $T(2017)$ **N**

e) $T(3)$ **N** | **f)** $T(2018)$ **N**

g) $T(4)$ **N** | **h)** $T(2019)$ **N**

i) $T(5)$ **F** | **j)** $T(2020)$ **F**

k) $T(1111)\Rightarrow T(222)$ **N** | **l)** $T(1111)\Rightarrow T(3333)$ **N**

m) $T(1111)\Rightarrow T(444)$ **N** | **n)** $T(1111)\Rightarrow T(5555)$ **F**

o) $T(2222)\Rightarrow T(111)$ **P** | **p)** $T(2222)\Rightarrow T(3333)$ **P**

q) $T(2222)\Rightarrow T(444)$ **N** | **r)** $T(2222)\Rightarrow T(8888)$ **P**

s) $T(3333)\Rightarrow T(222)$ **P** | **t)** $T(3333)\Rightarrow T(5555)$ **N**

u) $T(4444)\Rightarrow T(111)$ **P** | **v)** $T(4444)\Rightarrow T(8888)$ **N**

w) $T(5555)\Rightarrow T(111)$ **P** | **x)** $T(5555)\Rightarrow T(7777)$ **P**

y) $T(5555)\Rightarrow T(333)$ **P** | **z)** $T(5555)\Rightarrow T(9999)$ **P**