ANALIZA 1B, KOLOKWIUM nr 51, 3.11.2015, godz. 14.30-16.45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **51. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n} > 9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Zadanie **52. (10 punktów)**
Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $q^q=16$.

Zadanie **53.** **(10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

Zadanie **54. (10 punktów)**

Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n^{12}\cdot(n+1)^{12}>(n-1)^{11}\cdot(n+2)^{11}\cdot\left(n^2+n+22\right).$$

Zadanie **55. (10 punktów)**

W każdym z pięciu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za każde zadanie, które rozwiążesz poprawnie, otrzymasz **2 punkty.**

a) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{12}}{10} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{20}}{10} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{8}}{25} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{1000} 2^n < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{100} 2^{n^2} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zadanie **56.** **(10 punktów)**

Przy każdym z poniższych 26 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0, n-16)$ **punktów.**

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n^3)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$,
- implikacja $T(666) \Rightarrow T(55)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(1)$ ....

b) $T(2016)$ ....

c) $T(2)$ ....

d) $T(2017)$ ....

e) $T(3)$ ....

f) $T(2018)$ ....

g) $T(4)$ ....

h) $T(2019)$ ....

i) $T(5)$ ....

j) $T(2020)$ ....

k) $T(1111) \Rightarrow T(222)$ ....

l) $T(1111) \Rightarrow T(3333)$ ....

m) $T(1111) \Rightarrow T(444)$ ....

n) $T(1111) \Rightarrow T(5555)$ ....

o) $T(2222) \Rightarrow T(111)$ ....

p) $T(2222) \Rightarrow T(3333)$ ....

q) $T(2222) \Rightarrow T(444)$ ....

r) $T(2222) \Rightarrow T(8888)$ ....

s) $T(3333) \Rightarrow T(222)$ ....

t) $T(3333) \Rightarrow T(5555)$ ....

u) $T(4444) \Rightarrow T(111)$ ....

v) $T(4444) \Rightarrow T(8888)$ ....

w) $T(5555) \Rightarrow T(111)$ ....

x) $T(5555) \Rightarrow T(7777)$ ....

y) $T(5555) \Rightarrow T(333)$ ....

z) $T(5555) \Rightarrow T(9999)$ ....