KOLOKWIUM nr 53, 17.11.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **59. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$\binom{n+3}{7} < \frac{n^7}{7!}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\binom{n+3}{7} = \frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!}$$

zapiszemy dowodzoną nierówność w postaci

$$\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!} < \frac{n^7}{7!}\,.$$

Tezę zadania otrzymujemy mnożąc stronami trzy nierówności

$$(n-3)\cdot(n+3) < n^2\,,$$

$$(n-2)\cdot(n+2) < n^2\,,$$

$$(n-1)\cdot(n+1) < n^2$$

oraz równość

$$\frac{n}{7!} = \frac{n}{7!}\,.$$

Należy wyjaśnić, że nierówność

$$(n-k)\cdot(n+k) < n^2$$

wynika łatwo ze wzoru na różnicę kwadratów

$$(n-k)\cdot(n+k) = n^2-k^2 < n^2\,.$$

Można ją też otrzymać powołując się na nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną dwóch liczb w następującej wersji: Iloczyn dwóch liczb dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

Zadanie **60. (10 punktów)**

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\sqrt{2^{16}+2^{13}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}}{4^n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wyrażenie występujące pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki sumy występującej w liczniku bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Oszacujmy więc każdy składnik z osobna.

Szacując licznik od góry otrzymujemy

$$\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{1+2+1}+\sqrt{16+16+4}+\sqrt{2^8+2^7+2^4}+\sqrt{2^{12}+2^{10}+2^6}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}+2^{2n}}=$$
$$=\sqrt{(1+1)^2}+\sqrt{(4+2)^2}+\sqrt{\left(2^4+2^2\right)^2}+\sqrt{\left(2^6+2^3\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(2^{2n}+2^n\right)^2}=$$
$$=(1+1)+(4+2)+\left(2^4+2^2\right)+\left(2^6+2^3\right)+\ldots+\left(2^{2n}+2^n\right)=$$
$$=1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=\frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1\,.$$

Z kolei szacowanie licznika od dołu prowadzi do

$$\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{1+0}+\sqrt{16+0}+\sqrt{2^8+0}+\sqrt{2^{12}+0}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+0}=$$
$$=1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{3}\,.$$

Z powyższych nierówności wynikają oszacowania wyrazów wyjściowego ciągu:

$$b_n\leqslant\frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1}{4^n+1}=c_n$$

oraz

$$b_n\geqslant\frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}}{4^n+1}=a_n\,.$$

Obliczamy granice ciągów (a_n) i (c_n) dzieląc licznik i mianownik przez $4^n/3$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-4^{-n}}{3\cdot(1+4^{-n})}=\frac{4-0}{3\cdot(1+0)}=\frac{4}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-4^{-n}+6\cdot2^{-n}-3\cdot4^{-n}}{3\cdot(1+4^{-n})}=\frac{4-0+6\cdot0-3\cdot0}{3\cdot(1+0)}=\frac{4}{3}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n ,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{4}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3} ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{3} .$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 4/3.