

KOLOKWIUM nr 54, 24.11.2015, godz. 14.15-15.00**Zadanie 61.** (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geq 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2$ i $n = 1$ w istocie $k = 1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k , czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 2 \pmod{3}$, musi zachodzić $k \neq -1$. W konsekwencji $k \leq -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m = n = 1$ otrzymujemy $k = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2*. Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 3n^2 \equiv m^2 \not\equiv 2 \pmod{3}.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

Zadanie **62.** (10 punktów)

W każdym z zadań **62.1-62.5** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

62.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf A = -1/8$

$\sup A = 1/5$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

62.2. $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = -1/45$

$\sup B = 1/48$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

62.3. $C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = -1/5$

$\sup C = 1/19$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

62.4. $D = \left\{ \left(\frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf D = -1/3$

$\sup D = 1/9$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

62.5. $E = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf E = 1/3$

$\sup E = 1/2$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**