KOLOKWIUM nr 55, 1.12.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **63.** **(10 punktów)**

Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T$. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z następującego wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o ilorazie q, gdzie $|q|<1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Jeżeli dany w zadaniu szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma iloraz q, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. W konsekwencji

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = (-a_1) \cdot (-q)^{n-1}\,.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $-a_1$ i ilorazie $-q$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1-(-q)} = \frac{-a_1}{1+q}\,.$$

Podobnie

$$a_n^2 = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)^2 = \left(a_1^2\right) \cdot \left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

skąd wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Po uwzględnieniu założeń

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = S \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1+q} = T$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{a_1}{1+q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{-a_1}{1+q} = -ST\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest równa $-ST$.

Zadanie **64. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}\,.$$

Rozwiązanie:
Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n\cdot(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+3)+Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.