

KOŁOKWIUM nr **56**, 8.12.2015, godz. 14.15-15.25

Zadanie **65.** (10 punktów)

Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego  $A$ , że  $0 < \sup A < 1$  oraz  $\sup \{a^2 : a \in A\} = \sup A$ .

*Rozwiązanie:*

Przykładem zbioru spełniającego warunki zadania jest zbiór  $A = \{-1/2, 1/4\}$ . Wówczas  $\sup A = 1/4$ , a przy tym zbiór  $\{a^2 : a \in A\} = \{1/16, 1/4\}$  również ma kres górny  $1/4$ .

**Zadanie 66. (10 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu  $(a_n)$ , że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 1, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 4$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 9.$$

*Rozwiązanie:*

Niech

$$a_1 = 4$$

oraz

$$a_{3n-1} = 5, \quad a_{3n} = -8, \quad a_{3n+1} = 3$$

dla  $n \geq 1$ .

Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) &= (4 + 5 - 8) + (3 + 5 - 8) + (3 + 5 - 8) + (3 + 5 - 8) + \dots = \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) &= 4 + (5 - 8 + 3) + (5 - 8 + 3) + (5 - 8 + 3) + \dots = \\ &= 4 + 0 + 0 + 0 + \dots = 4 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) &= 4 + 5 + (-8 + 3 + 5) + (-8 + 3 + 5) + (-8 + 3 + 5) + \dots = \\ &= 9 + 0 + 0 + 0 + \dots = 9. \end{aligned}$$

Zadanie **67.** (20 punktów)

W każdym z zadań **67.1-67.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**67.1.**  $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 350} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf A = -1$$

$$\sup A = 1/14$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

**67.2.**  $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf B = -1/5$$

$$\sup B = 1/6$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

**67.3.**  $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf C = -1$$

$$\sup C = 1/6$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

**67.4.**  $D = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf D = 0$$

$$\sup D = 1/10$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **TAK**

**67.5.**  $E = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf E = 0$$

$$\sup E = 1/30$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **TAK**

$$67.6. F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf F = \sqrt{\log_2 3}$$

$$\sup F = \sqrt{\log_2 5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $F$  **NIE**

$$67.7. G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf G = \sqrt{2}$$

$$\sup G = \sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $G$  **NIE**

$$67.8. H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf H = \sqrt{2}$$

$$\sup H = \sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $H$  **NIE**

$$67.9. I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf I = 2$$

$$\sup I = \sqrt{5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $I$  **NIE**

$$67.10. J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf J = \sqrt{3}$$

$$\sup J = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $J$  **TAK**