KOLOKWIUM nr 57, 15.12.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **68. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\,. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}<1\,. \tag{2}$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1\,. \tag{3}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \tag{4}$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot1\cdot1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Zadanie **69. (10 punktów)**
Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki przez wspólną wielkość, a liczniki przez możliwie proste wyrażenia, które później uda się wysumować.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{0+1}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\frac{\sqrt{0+2^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\frac{\sqrt{0+3^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\ldots+\frac{\sqrt{0+k^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\ldots+\frac{\sqrt{0+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=$$

$$=\frac{1+2^3+3^3+\ldots+n^9}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{1+2+1}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\frac{\sqrt{1+2\cdot2^3+2^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\frac{\sqrt{1+2\cdot3^3+3^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+2\cdot k^3+k^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\sqrt{1+2\cdot n^9+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+0}}=\frac{(1+1)+(1+2^3)+(1+3^3)+\ldots+(1+n^9)}{n^{12}}=$$

$$=\frac{n^3+\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4}}{n^{12}}=\frac{4n^3+n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot n^{12}}=c_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{\left(1+n^{-3}\right)^2}{4\cdot\sqrt{1+n^{-6}}}\to\frac{1}{4}$$

oraz

$$c_n = \frac{4n^3 + n^6 \cdot (n^3+1)^2}{4 \cdot n^{12}} = \frac{4n^{-9} + (1+n^{-3})^2}{4} \to \frac{1}{4}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 1/4.