KOLOKWIUM nr 58, 22.12.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **70. (10 punktów)**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x)=y$ jest równoważna równości $f(y)=x$, czyli

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,, \tag{$\clubsuit$}$$

jeśli przyjmiemy $t=e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t>0$ i $y=\ln t$. Rozwiązujemy równanie ($\clubsuit$) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x:

$$2xt=t^2-1\,,$$

$$t^2-2xt-1=0\,,$$

$$t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}\,,$$

$$t=x\pm\sqrt{x^2+1}\,,$$

skąd wobec $t>0$ musimy przyjąć "$\pm$" = "$+$". Ostatecznie

$$t=x+\sqrt{x^2+1}$$

i w konsekwencji

$$g(x)=y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(4/3)=\frac{1}{\sqrt{16/9+1}}=\frac{1}{\sqrt{25/9}}=\frac{3}{5}\,.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$f'(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}=\sqrt{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{(f(y))^2+1}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y)=\sqrt{(f(y))^2+1}$$

dla $y=g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(12/5)=\frac{1}{\sqrt{144/25+1}}=\frac{1}{\sqrt{169/25}}=\frac{5}{13}\,.$$

Zadanie **71.** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że sumy $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są liczbami całkowitymi, a ponadto zachodzi równość $S_2 = S_4$. Dla podanego przykładu podać wartości sum S_1, S_2 i S_4.

Wskazówki: Nie istnieje czysty szereg geometryczny spełniający warunki zadania, ale przykład można skonstruować odpowiednio modyfikując szereg geometryczny.

W rozwiązaniu wolno użyć gotowego przykładu z wczorajszego kolokwium:

$$b_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}, \qquad T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5, \qquad T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = T_4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = \frac{25}{7}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy modyfikację szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, w której każdy wyraz jest powtórzony siedmiokrotnie, a dokładniej

$$a_n = b_{[(n+6)/7]} = \frac{5 \cdot 3^{[(n-1)/7]}}{4^{[(n+6)/7]}}.$$

Wówczas

$$S_1 = 7 \cdot T_1 = 35, \qquad S_2 = 7 \cdot T_2 = 25 \quad \text{oraz} \quad S_4 = 7 \cdot T_4 = 25.$$