ANALIZA 1B, KOLOKWIUM nr 58, 22.12.2015, godz. 14.15-15.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **70.** **(10 punktów)**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Zadanie **71.** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że sumy $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są liczbami całkowitymi, a ponadto zachodzi równość $S_2 = S_4$. Dla podanego przykładu podać wartości sum S_1, S_2 i S_4.

Wskazówki: Nie istnieje czysty szereg geometryczny spełniający warunki zadania, ale przykład można skonstruować odpowiednio modyfikując szereg geometryczny.

W rozwiązaniu wolno użyć gotowego przykładu z wczorajszego kolokwium:

$$b_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}, \qquad T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5, \qquad T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = T_4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = \frac{25}{7}\,.$$