KOLOKWIUM nr 59, 12.01.2016, godz. 14.15-15.15

Zadanie **72. (10 punktów)**

Skonstruować przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

Rozwiązanie:

Postaramy się uzupełnić funkcję f na przedziale $(0,1)$ funkcją wielomianową. Ponieważ musimy dopasować cztery liczby (wartości i pochodne w punktach 0 i 1), wypróbujemy wielomian, w którym można dobrać cztery współczynniki, a mianowicie wielomian stopnia co najwyżej 3, oznaczmy go przez

$$W(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,.$$

Pełna definicja funkcji f przyjmie więc postać:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{dla} \quad 0<x<1\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

Zauważmy, że pochodna wielomianu jest dana wzorem $W'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Aby określona wyżej funkcja f była ciągła i różniczkowalna, muszą zachodzić następujące równości:

- ciągłość w zerze: $f(0)=W(0^+)$, czyli $0=d$,
- ciągłość w jedynce: $f(1)=W(1^-)$, czyli $1=a+b+c+d$,
- różniczkowalność w zerze: $f'(0^-)=W'(0^+)$, czyli $0=c$,
- różniczkowalność w jedynce: $f'(1^+)=W'(1^-)$, czyli $1=3a+2b+c$.

Wobec $c=d=0$ otrzymujemy układ równań

$$f(x)=\begin{cases}a+b=1\,,\\ 3a+2b=1\,,\end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a=-1$, $b=2$, skąd $W(x)=-x^3+2x^2$.

Odpowiedź: Funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja określona następującym wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ -x^3+2x^2 & \text{dla} \quad 0<x<1\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

Zadanie **73. (10 punktów)**
Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[8,9]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(8,9)$, że
$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c)\,.$$
Ponieważ
$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,$$
z nierówności $8<c<9$ otrzymujemy
$$\frac{1}{9} \;<\; \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} \;<\; \frac{1}{8}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

Zadanie **74. (10 punktów)**

Udowodnić nierówność

$$\mathrm{arctg}\,6+\mathrm{arctg}\,12<\mathrm{arctg}\,7+\mathrm{arctg}\,10\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10<\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,6\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$ na przedziałach $[6,7]$ oraz $[10,12]$ wynika istnienie takich liczb $c\in(6,7)$ oraz $d\in(10,12)$, że

$$\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,6=f'(c)\,.$$

oraz

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10=2\cdot f'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $6<c<7$ oraz $10<d<12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50}\quad<\quad\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,6=f'(c)=\frac{1}{c^2+1}\quad<\quad\frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145}\quad<\quad\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10=2\cdot f'(d)=\frac{2}{d^2+1}\quad<\quad\frac{2}{101}\,.$$

W konsekwencji

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10<\frac{2}{101}<\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,6\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x)=\mathrm{arctg}(6+x)+\mathrm{arctg}(12-2x)$$

będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0,1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$f'(x)=\frac{1}{(6+x)^2+1}+\frac{-2}{(12-2x)^2+1}=\frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=\frac{2\cdot(x-1)^2+68\cdot(1-x)+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}\,,$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x\leqslant 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\mathrm{arctg}\, x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\mathrm{arctg}\,6+\mathrm{arctg}\,12$ jest argumentem liczby

$$(1+6i)\cdot(1+12i)=1+18i-72=-71+18i=71\cdot\left(-1+\frac{18}{71}\cdot i\right),$$

natomiast $\mathrm{arctg}\,7+\mathrm{arctg}\,10$ jest argumentem liczby

$$(1+7i)\cdot(1+10i)=1+17i-70=-69+17i=69\cdot\left(-1+\frac{17}{69}\cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1+\frac{18}{71}\cdot i \qquad \text{oraz} \qquad -1+\frac{17}{69}\cdot i\,.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71}>\frac{17}{69},$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71}>\frac{18}{72}=\frac{1}{4}=\frac{17}{68}>\frac{17}{69}.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1+\frac{1}{4}\cdot i=-\left(1-\frac{1}{4}\cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi-\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,4\right)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,4\,,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówności

$$\mathrm{arctg}\,6+\mathrm{arctg}\,12<\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,4<\mathrm{arctg}\,7+\mathrm{arctg}\,10\,.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\mathrm{arctg}\,6+\mathrm{arctg}\,12=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\left(\frac{71}{18}\right)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\left(4-\frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\mathrm{arctg}\,7+\mathrm{arctg}\,10=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\left(\frac{69}{17}\right)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\left(4+\frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10=\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{121}\right)<\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{86}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{43}\right)=\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,6\,,$$

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,7=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{17}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{68}\right)<\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{61}\right)=\mathrm{arctg}\,10-\mathrm{arctg}\,6$$

oraz

$$\mathrm{arctg}\,12-\mathrm{arctg}\,10-\mathrm{arctg}\,7+\mathrm{arctg}\,6=\mathrm{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right)>0\,.$$