KOLOKWIUM nr 5, 16.11.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **9. (10 punktów)**

Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{666}\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=666$. Dla $k=666$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: Dla $k=666$ dana w zadaniu granica ma wartość 1/4.

Zadanie **10.** **(10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\leqslant 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\frac{2!}{1!\cdot 2!}=1$$

oraz

$$P=4^0=1\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1\leqslant 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\leqslant 4^{n-1}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}\leqslant 4^{n}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)}\leqslant$$

$$\leqslant 4^{n-1}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4^{n-1}\cdot 4=4^n=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4\,. \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2n+1\leqslant 2\cdot(n+2)\,,$$

$$2n+1\leqslant 2n+4\,,$$

$$1\leqslant 4\,,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Zauważmy, że lewa strona dowodzonej nierówności może być zapisana w postaci $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.
Ponieważ liczba $\binom{2n}{n}$ występuje w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala, jest ona mniejsza od sumy wszystkich liczb występujących w tym wierszu, czyli od 2^{2n}.

W konsekwencji dla $n\geqslant 3$ dowodzona nierówność wynika z następującego ciągu nierówności:

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}<\frac{4^n}{n+1}\leqslant\frac{4^n}{3+1}=4^{n-1}\,.$$

Natomiast dla $n=1$ i $n=2$ sprawdzamy bezpośrednio, że dana w zadaniu nierówność przyjmuje odpowiednio postać $1\leqslant 1$ i $2\leqslant 4$.