KOLOKWIUM nr 60, 19.01.2016, godz. 14.15-15.25

Zadanie **75.** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wspólną wielkość, a liczniki, które tworzą postęp geometryczny, pozostawimy bez zmian.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+0}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{3^n}=c_n\,.$$

W licznikach uzyskanych oszacowań występuje suma tego samego postępu geometrycznego n+1-wyrazowego o pierwszym wyrazie 2^n i ilorazie 3/2. Mamy więc

$$2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n=2^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}=3^{n+1}-2^{n+1}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, a ponadto przy $n \to \infty$ mamy

$$a_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n+7^n}} = \frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n}} \to 3$$

oraz

$$c_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n} = 3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 3\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3.

Zadanie **76.** **(10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}\,.$$

Rozwiązanie:
Szukamy takich liczb A, B i C że
$$\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n}+\frac{C}{n+2}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)\cdot n\cdot(n+2)$ otrzymujemy
$$1=A\cdot n\cdot(n+2)+B\cdot(n-2)\cdot(n+2)+C\cdot(n-2)\cdot n\,.$$
Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/8$, dla $n=0$ dostajemy $B=-1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $C=1/8$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{6}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)+\ldots\right.$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{2}{N-4}+\frac{1}{N-2}\right)+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{2}{N-3}+\frac{1}{N-1}\right)+$$
$$\left.+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{2}{N-2}+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{2}{N}+\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right),$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do
$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{12+6-4-3}{12}=\frac{11}{96}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 11/96.

Uwaga: Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości
$$\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(n-2)\cdot n}-\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$
pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

Zadanie **77. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\,.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|=\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\leqslant\frac{4}{5}\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right).$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2\leqslant16$ i $y^2\leqslant16$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=\sqrt{\frac{9x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9y^2}{25}+\frac{16y^2}{25}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16y^2}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(y^2+9)}=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right).$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c leży między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x\in[-4,4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant\frac{4}{5}\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}\,,$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x\neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}\,.$$