KOLOKWIUM nr 61, 26.01.2016, godz. 14.15-15.25

Zadanie **78. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2} \ < \ 1 \ < \ \frac{2}{3}\cdot 2\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}<1$$

oraz

$$\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,. \qquad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \ (\diamondsuit)$$

W celu dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$. Otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\spadesuit)$ prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,, \qquad \Big| :\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot n+1\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$n+\frac{3}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$\frac{(n+1)+(n+2)}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $n+1$ i $n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności ($\diamondsuit$). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności ($\diamondsuit$) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności ($\spadesuit\spadesuit$) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,, \qquad \Big| :\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}+1\leqslant\frac{2}{3}\cdot(n+2)\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}+\frac{3}{2}\leqslant n+2\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant n+\frac{1}{2}\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant\frac{n+(n+1)}{2}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb n i $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie **79. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}:\,k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $k=m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2+n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot n^{-3}+n^6}=0\,.$$

3° Liczba $1/3$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $k=m=n=1$ w $(\heartsuit)$.

4° Każdy element zbioru Z jest niewiększy od $1/3$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb k^3, m^6, n^9 otrzymujemy

$$\sqrt[3]{k^3\cdot m^6\cdot n^9}\leqslant\frac{k^3+m^6+n^9}{3}\,,$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1**° i **2**° stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3**° i **4**° wynika $\sup Z=1/3$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/3.

Zadanie **80. (10 punktów)**

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,2)$ spełniającej nierówność

$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla myślących śmiertelników):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}\,.$$

Ponieważ

$$f(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(1)=2015-2016=-1\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.

Sposób II (dla bezmyślnych cudotwórców):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Zamiast wyciągać wnioski na podstawie analizy przebiegu powyższej funkcji, bezmyśnie uczepimy się miejsca, w którym pochodna tej funkcji się zeruje, a sama funkcja osiąga maksimum.

Pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f'(x)&=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}=\\ &=2015\cdot x^{2014}\cdot(2-x)^{2016}-2016\cdot x^{2015}\cdot(2-x)^{2015}=\\ &=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(2015\cdot(2-x)-2016\cdot x)=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(4030-4031\cdot x)\,. \end{aligned}$$

Zatem na przedziale $(0,2)$ pochodna funkcji f ma następujący znak:

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{dla} \quad x\in\left(0,\frac{4030}{4031}\right)\\ =0 & \text{dla} \quad x=\frac{4030}{4031}\\ <0 & \text{dla} \quad x\in\left(\frac{4030}{4031},2\right) \end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja f osiąga na przedziale $(0,2)$ największą wartość w punkcie $x=\frac{4030}{4031}$ i wartością tą jest

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)=\left(\frac{4030}{4031}\right)^{2015}\cdot\left(\frac{4032}{4031}\right)^{2016}=\frac{4030^{2015}\cdot 4032^{2016}}{4031^{4031}}\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy "tylko" udowodnić nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$. Problem polega na tym, że w rzeczywistości $f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx 1{,}000124$.

Aby wykazać nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$, należałoby udowodnić, że

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4031}\,, \qquad (\clubsuit)$$

co jest praktycznie niewyobrażalne bez użycia komputera, gdyż po obu stronach tej nierówności występują liczby 14534-cyfrowe, a ich iloraz jest w przybliżeniu równy 1,000124.

Cudotwórca przepisałby nierówność (♣) w postaci

$$(2n)^n\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1},$$

gdzie $n=2015$, a następnie przemnożył ją stronami przez $2n$ otrzymując kolejno nierówności równoważne:

$$(2n)^{n+1}\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\cdot(2n),$$

$$((2n)\cdot(2n+2))^{n+1}>\left((2n+1)^2\right)^n\cdot(2n+1)\cdot(2n),$$

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+2n\right). \qquad (\diamondsuit)$$

W tym momencie cudotwórca zauważyłby, że po każdej ze stron nierówności ($\diamondsuit$) znajduje się iloczyn $n+1$ czynników dodatnich. Gdyby sumy czynników po każdej ze stron były równe, większy byłby iloczyn o wszystkich czynnikach równych, czyli iloczyn po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$). Tymczasem jest nawet lepiej, gdyż suma czynników po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$) jest równa

$$\left(4n^2+4n\right)\cdot(n+1)=4n^3+8n^2+4n,$$

a po prawej jest od niej mniejsza i wynosi

$$\left(4n^2+4n+1\right)\cdot n+\left(4n^2+2n\right)=4n^3+8n^2+3n.$$

Dowód nierówności (♣) jest więc zakończony.

Uwaga:

Cudotwórca zamiast nierówności ($\diamondsuit$) udowodniłby nierówność mocniejszą, a mianowicie

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+3n\right),$$

co prowadzi do wzmocnionej wersji nierówności (♣):

$$4030^{2015}\cdot4032^{2016}>4031^{4030}\cdot4031{,}5,$$

w której iloraz strony lewej do prawej jest w przybliżeniu równy 1,00000000769 (bezpośrenio po przecinku występuje osiem zer). To doprowadziłoby do nierówności

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)>\frac{4031{,}5}{4031}=1+\frac{1}{8062}\approx\mathbf{1{,}0001240}387,$$

gdy tymczasem w rzeczywistości

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx\mathbf{1{,}0001240}463.$$