## KOLOKWIUM nr 7, 30.11.2015, godz. 14.15-15.00

*Zadanie* **12.** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 6\,.$$

*Wskazówka:* Poszukać szeregu geometrycznego.

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 6 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} = 6\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 6(1-q) \\ c^2 = 6(1-q^2)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$1+q = 6-6q\,,$$

$$7q = 5\,,$$

$$q = \frac{5}{7}\,,$$

skąd

$$c = 1+q = 1+\frac{5}{7} = \frac{12}{7}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 5/7$, $c = 12/7$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{12\cdot 5^{n-1}}{7^n}\,.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cdot 5^{n-1}}{7^n}\,.$$

*Zadanie* **13. (10 punktów)**

W każdym z zadań **13.1-13.7** podaj dziedzinę funkcji $f$ określonej podanym wzorem.

Punktacja:

- za każdą poprawnie podaną dziedzinę: **1 punkt**
- premia za szlemika (6 poprawnych dziedzin): **1 punkt**
- premia za szlema (7 poprawnych dziedzin): **3 punkty**

**13.1.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $\qquad D_f=(\boldsymbol{-\infty,\ 1}]\cup[\boldsymbol{4,\ +\infty})$

**13.2.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $\qquad D_f=[\boldsymbol{1,\ +\infty})$

**13.3.** $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $\qquad D_f=\boldsymbol{\{1\}}\cup[\boldsymbol{4,\ +\infty})$

**13.4.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $\qquad D_f=[\boldsymbol{-1,\ 1}]\cup[\boldsymbol{4,\ +\infty})$

**13.5.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $\qquad D_f=[\boldsymbol{-2,\ 1}]\cup[\boldsymbol{2,\ +\infty})$

**13.6.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $\qquad D_f=(\boldsymbol{-\infty,\ -2}]\cup[\boldsymbol{-1,\ 1}]\cup[\boldsymbol{2,\ +\infty})$

**13.7.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $\qquad D_f=(\boldsymbol{-\infty,\ -2}]\cup\boldsymbol{\{-1\}}\cup\boldsymbol{\{1\}}\cup[\boldsymbol{2,\ +\infty})$