

KOŁOKWIUM nr 8, 7.12.2015, godz. 14.15-15.05**Zadanie 14.** (10 punktów)Niech funkcja $f : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

*Rozwiązanie:*Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{|x - y|}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot \sqrt{xy}} \leq \frac{|x - y|}{(\sqrt{4} + \sqrt{4}) \cdot \sqrt{16}} = \\ &= \frac{|x - y|}{(2 + 2) \cdot 4} = \frac{|x - y|}{16}, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

Zadanie **15.** (20 punktów)

W każdym z zadań **15.1-15.9** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**. Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań otrzymasz kolejne **2 punkty**.

15.1. $A = \{x^2 : x \in (-3, 1)\}$	Ocena
$\inf A = 0$	$\sup A = 9$
Czy kres dolny należy do zbioru A TAK	Czy kres górny należy do zbioru A NIE
15.2. $B = \{x^3 : x \in (-3, 1)\}$	Ocena
$\inf B = -27$	$\sup B = 1$
Czy kres dolny należy do zbioru B NIE	Czy kres górny należy do zbioru B NIE
15.3. $C = \{x^4 : x \in (-3, 1)\}$	Ocena
$\inf C = 0$	$\sup C = 81$
Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C NIE
15.4. $D = \{x^2 - 2x + 1 : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf D = 0$	$\sup D = 9$
Czy kres dolny należy do zbioru D TAK	Czy kres górny należy do zbioru D NIE
15.5. $E = \{x^2 - 4x + 4 : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf E = 0$	$\sup E = 9$
Czy kres dolny należy do zbioru E TAK	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
15.6. $F = \{x^2 - 6x + 9 : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf F = 0$	$\sup F = 16$
Czy kres dolny należy do zbioru F TAK	Czy kres górny należy do zbioru F NIE
15.7. $G = \{x^2 - 2x : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf G = -1$	$\sup G = 8$
Czy kres dolny należy do zbioru G TAK	Czy kres górny należy do zbioru G NIE
15.8. $H = \{x^2 - 4x : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf H = -4$	$\sup H = 5$
Czy kres dolny należy do zbioru H TAK	Czy kres górny należy do zbioru H NIE
15.9. $I = \{x^2 - 6x : x \in (-1, 4)\}$	Ocena
$\inf I = -9$	$\sup I = 7$
Czy kres dolny należy do zbioru I TAK	Czy kres górny należy do zbioru I NIE