KOLOKWIUM nr 9, 14.12.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **16.** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\leqslant n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3-9}}{1+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k/3-9=0$, czyli $k=27$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^9}=\sqrt[3]{k\cdot n^{k-27}+\frac{1}{n^{23}}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k-27=0$, czyli $k=27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

Zadanie **17. (10 punktów)**
Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4}\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tyma razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.