1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Poziom A (z myślą o ocenie dostatecznej na wykładzie A)

Zadania do samodzielnego rozwiązania. Pomoc można uzyskać na konsultacjach u dowolnego prowadzącego lub podczas tutoringu prof. Damek (październikowe wtorki 14–17, pok. 901 lub s. 601). W miarę wolnego czasu wątpliwości mogą zostać wyjaśnione także na ćwiczeniach.

1. Wskazać taką liczbę C, że dla dowolnej liczby całkowitych nieujemnych n i k, gdzie $n \geqslant k+2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

2. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7},\ \binom{100}{27},\ \binom{100}{47},\ \binom{100}{57},\ \binom{100}{77},\ \binom{100}{97}.$$

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4}\cdot 3^n + \frac{1}{4}\ .$$

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1-\frac{1}{n}\ .$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

5. $\sum_{i=3}^{5} i^2$ **6.** $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ **7.** $\sum_{i=-10}^{10} 7$ **8.** $\prod_{i=1}^{5} i$ **9.** $\prod_{i=-2015}^{2015} i^{2015}$

10. Czy równość $2\cdot\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n=8,\ k=2$ **b)** $n=10,\ k=3$ **c)** $n=15,\ k=4$ **d)** $n=17,\ k=5$

11. Czy prawdziwa jest równość

a) $\prod_{n=2}^{15} n = 15!$ **b)** $\prod_{n=5}^{24} n = 23!$ **c)** $\prod_{n=-1}^{37} n = -37!$ **d)** $\sum_{n=-28}^{29} n = 29$

12. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}.$$

14. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

15. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6–7.10.2015 (grupy 2–5). Ewentualny wolny czas można poświęcić na zadania poziomu A.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1.$$

UWAGA: Potęgowanie wykonujemy "od góry": $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

19. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<2^{2n-1}$.

20. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

21. Liczby a_n,b_n są określone wzorami $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $b_n^2-2a_n^2=(-1)^n$.

OSZUSTWO **22.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n<2^n+110. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n\geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,

dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,

dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180<174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

23. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n<2^n+25$.

24. O zdaniu[1] $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest fałszywe **b)** $T(10)$ jest prawdziwe

c) $T(15)$ jest fałszywe **d)** $T(20)$ jest prawdziwe

25. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

a) $T(27)\Rightarrow T(39)$ **b)** $T(99)\Rightarrow T(100)$ **c)** $T(63)\Rightarrow T(71)$ **d)** $T(29)\Rightarrow T(57)$

26. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1)\Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe ....

b) $T(6)$ jest prawdziwe ....

c) $T(7)$ jest fałszywe ....

d) $T(8)$ jest fałszywe ....

27. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1)\Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe ....

b) $T(8)$ jest prawdziwe ....

c) $T(9)$ jest fałszywe ....

d) $T(10)$ jest fałszywe ....

[1]Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstraszające.

Poziom C (dla aspirujących do oceny wyższej niż 4.0)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6.10.2015 (grupa 1). Należy przyjść na ćwiczenia do grupy 1 ORAZ na ćwiczenia do jednej z pozostałych grup, gdzie omówione zostaną zadania poziomu B.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

28. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

29. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

30. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

31. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n .... 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3 .$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geqslant$, $\leqslant$.

32. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów. Spróbować zastąpić liczbę 200 mniejszą liczbą.

33. Jak wygląda analogiczne zadanie w przestrzeni czterowymiarowej?

34. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A, B, C, D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania

$$A \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+B}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant C \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+D}}.$$

35. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geqslant 4$, $k \geqslant 2$.

36. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

37. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

38. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

39. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

40. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 20$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leqslant n \leqslant 30$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-3)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest
a) $T(37)$ **b)** $T(38)$ **c)** $T(10)$ **d)** $T(11)$

41. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:
P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)
F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)
N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Wówczas:

a) $T(70)$ .... **b)** $T(81)$ ....

c) $T(92)$ .... **d)** $T(101)$ ....

e) $T(140)$ .... **f)** $T(75) \Rightarrow T(105)$ ....

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$ .... **h)** $T(51) \Rightarrow T(60)$ ....

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$ .... **j)** $T(10) \Rightarrow T(12)$ ....