Granica funkcji

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 8–9.12.2015 (grupy 2–5).

Nie wszystkie zadania będą omówione na ćwiczeniach. Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami i umieć wskazać zadania, które sprawiły najwieksza trudność.

Obliczyć następujące granice:

384. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **385.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **386.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

387. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **388.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **389.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

390. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **391.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2015}-1}{x^{10}-1}$ **392.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

393. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **394.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **395.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

396. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **397.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **398.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **399.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

400. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **401.** $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **402.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

403. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{x}{2}$ **404.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **405.** $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$

406. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

407. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d\,,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=$........................, $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=$........................, $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=$........................, $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$........................

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f,g,h są określone w otoczeniu punktu $x_0\in[-\infty,+\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)\,.$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

408. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(x^{1000}\right)}{\sqrt{x}}$ **409.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

obliczyć

410. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **411.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$

412. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **413.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **414.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$

415. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot f(x)}$, gdzie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Obliczyć granice funkcji.

416. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x$ **417.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x$ **418.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x$

419. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x$ **420.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x$ **421.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x$

422. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x$ **423.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x$ **424.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x$

425. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x$

Wyznaczyć wartości granic ciągów.

426. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ **427.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2015}\right)$ **428.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2015n+1}\right)$

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2015}$ **430.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2015}\right)^{2015}$ **431.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2015n+1}\right)^{2015}$

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$ **433.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2015n}$ **434.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n/2015}$

435. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^{2015}}$ **436.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$ **437.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n}$

438. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2(n+8)}{\log_2 n}$ **439.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2(n+8)-\log_2 n\right)$ **440.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n(n+8)$

441. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n}$ **442.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2(8n+1)-\log_2 n\right)$ **443.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n(8n+1)$

444. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2\left(n^8+1\right)}{\log_2 n}$ **445.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2\left(n^8+1\right)-\log_2 n\right)$ **446.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n\left(n^8+1\right)$

Poziom C – 8.12.2015 (grupa 1)

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

447. $f(x)=\log_4(2^x+8^x)$ **448.** $f(x)=\log_2(2^{2x}-2^{4x+1}+2^{6x})$

Obliczyć granice

449. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **450.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$ **451.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x}$

452. $\lim\limits_{x\to0^+}2^{2^{1/x}}$ **453.** $\lim\limits_{x\to0^-}2^{2^{1/x}}$ **454.** $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{2^{1/x}}$ **455.** $\lim\limits_{x\to0^+}2^{2^{2^{1/x}}}$ **456.** $\lim\limits_{x\to0^-}2^{2^{2^{1/x}}}$

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{2^{2^{1/x}}}$ **458.** $\lim\limits_{x\to16^-}\{\log_4x\}$ **459.** $\lim\limits_{x\to16^+}\{\log_4x\}$ **460.** $\lim\limits_{x\to16^-}\{\log_8x\}$

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

461. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$......................., $d=$.......................

b) $a=$......................., $b=2$, $c=3$, $d=$.......................

c) $a=$......................., $b=$......................., $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$......................., $d=$.......................

e) $a=$......................., $b=3$, $c=6$, $d=$.......................

f) $a=$......................., $b=$......................., $c=6$, $d=6$

462. Podać wszystkie sześć par parametrów (a,b), dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

463. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a,b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.