

Pochodna funkcji

Poziom C – 15.12.2015 (grupa 1)

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

Wskazówka 1: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.

Wskazówka 2: $A^B = e^{B \ln A}$.

505. $e^x \ln x$

506. $\frac{\ln x}{e^x}$

507. $x^{10} \ln x$

508. $\ln \ln x$

509. $\ln \frac{1}{1+x}$

510. $\log_{10}(x-1)$

511. $\log_2 |\log_3 (\log_5 x)|$

512. $e^{\sqrt{\ln x}}$

513. x^{x^2}

514. x^{x^x}

515. $x^{\sqrt{x}}$

516. $(\ln x)^x$

517. $e^{-x^2} \ln x$

518. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

519. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n , aby funkcja f_n określona wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \geq 1/n \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f'_n . Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

520. Na potrzeby tego zadania funkcję f nazwiemy **pikoróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^\spadesuit(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **pikopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

Obliczyć pikopochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

we wszystkich punktach jej pikoróżniczkowalności.

521. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{7 + \sin^4 x - \sin^2 x}{7 + \cos^4 x - \cos^2 x}.$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.