Pochodna funkcji (tw. Lagrange'a)

Poziom C – 22.12.2015 (grupa 1)

555. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z \subset \mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, ze istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b, nie wiemy jednak z góry, która z liczb a, b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

(♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b$$

(♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b \ \wedge\ b<c<a$$

(♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b \ \vee\ b<c<a$$

(♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♣♣) $$\underset{c>0}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♢♢) $$\underset{c\in[0,1]}{\exists}\ bc+a(1-c)\in Z$$

(♡♡) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(b-a)c\in Z$$

(♠♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(a-b)c\in Z$$

(♣♣♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c}{b-a}\in(0,1)$$

(♢♢♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-b}{b-a}\in(0,1)$$

(♡♡♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$$

(♠♠♠) $$\underset{c\in Z\setminus\{a\}}{\exists}\ \frac{b-a}{c-a}>1$$

556. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

(4♣) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

(5♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

(6♡) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\forall}\ \underset{s\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♠) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

557. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$f_1(3)=1,\ \ f_1(5)=2,$
$f_2(0)=3,\ \ f_2(4)=-1,$
$f_3(-5)=0,\ \ f_3(15)=10,$
$f_4(1)=2,\ \ \underset{x}{\forall} f_4'(x)\neq 1,$
$f_5(0)=0,\ \ f_5(2)=10,\ \ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$
$f_6(0)=7,\ \ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$
$f_7(3)=5,\ \ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$
$f_8(-2)=0,\ \ f_8(0)=10,\ \ f_8(3)=4,$
$f_9(-1)=0,\ \ f_9(1)=100,\ \ f_9'(3)=40,$
$f_{10}(1)=-5,\ \ f_{10}(11)=5,\ \ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$
$f_{11}(0)=0,\ \ f_{11}(100)=0,\ \ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$
$f_{12}(-100)=-100,\ \ f_{12}(100)=100,\ \ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0) \neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99) > 0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c) = 5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c) = 44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c \neq d}{\exists}\ f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c) = f_i'(d)$$

558. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3) = 7$$

$$2 \leqslant f'(x) \leqslant 3 \quad \text{dla każdego} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

A. $\sup\{f(6) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................

B. $\inf\{f(5) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................

C. $\sup\{f(2) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................

D. $\inf\{f(1) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................

E. $\sup\{f(9)-f(4) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................

F. $\inf\{f(7)-f(0) : f \in \mathbb{T}\}=$...................................