Pochodna funkcji, pochodne wyższych rzędów.

Poziom C – 12.01.$\binom{64}{2}$ (grupa 1)

590. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje taka liczba rzeczywista A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-1+\ln(x+1)}{x^n} & \text{dla } x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A.

591. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=-5x+\ln\left(e^{2x}+e^{8x}\right).$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$|f'(x)|<3.$$

592. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną. Wiadomo, że

$$f(0)=0, \qquad f(3)=9, \qquad f(5)=11.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)=2$.

593. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(7)=12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1<f'(x)<2.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4)-.........|<1.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

594. Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazwiemy **superwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x)\geqslant 1$.

Dowieść, że dowolna funkcja superwypukła spełnia nierówność

$$f(1)\leqslant\frac{f(0)+f(2)}{2}-\frac{1}{2}.$$

595. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) wzoru Taylora odpowiedniej funkcji f. Oszacować błąd przybliżenia w postaci $(x-x_0)^3\cdot f'''(c)/6$.

596. $\sqrt{79}$ **597.** $\sqrt[4]{e}$ **598.** $\sqrt[3]{126}$ **599.** $\sqrt[7]{126}$ **600.** $\ln 2=\ln(1{,}25^2\cdot 1{,}28)$