Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 19–20.01.2016 (grupy 2–5).

Nie wszystkie zadania będą omówione na ćwiczeniach. Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami i umieć wskazać zadania, które sprawiły najwieksza trudność.

601. Wyznaczyć punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie (2,4) z osią OY.

602. Wyznaczyć punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x)=e^x$ w punkcie (0,1) z osią OX.

603. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych stycznych do wykresu funkcji $f(x)=x^3$ w punktach $(-1,-1)$ i (2,8).

Bez korzystania z kalkulatora wstawić w miejsce kropek znak nierówności "$<$" albo "$>$" :

604. $2\cdot \operatorname{arctg}34$ .... $\operatorname{arctg}33+\operatorname{arctg}35$

605. $\sqrt[4]{32}$ .... $\sqrt[4]{1,9}+\sqrt[4]{2,1}$

606. $2\cdot\sin 47^\circ$ .... $\sin 46^\circ+\sin 48^\circ$

607. 512 .... $3,99^{3,99}+4,01^{4,01}$

608. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
Lemat: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

609. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
Lemat: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f'(a)=g'(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

610. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
Lemat: Niech $a<b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f(b)=g(b)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)>g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

611. $\ln(x+1)$ ..... x dla $x>0$

612. $\ln(x+1)$ ..... $x-\dfrac{x^2}{2}$ dla $x>0$

613. $\ln(x+1)$ ..... x dla $-1<x<0$

614. $\ln(x+1)$ ..... $x-\dfrac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

615. $\ln(x+1)$ ..... $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ dla $x>0$

616. $\ln(x+1)$ ..... $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

617. $\ln(x+1)$ ..... $\dfrac{x}{2}$ dla $0<x<2$

618. $\mathrm{arctg}x$ ..... x dla $x>0$

619. $\mathrm{arctg}x$ ..... $\dfrac{4x}{\pi}$ dla $0<x<1$

620. $\sin x$ ..... x dla $x>0$

621. $\cos x$ ..... $1-\dfrac{x^2}{2}$ dla $x>0$

622. $\sin x$ ..... $x-\dfrac{x^3}{6}$ dla $x>0$

623. $\cos x$ ..... $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ dla $x>0$

624. $\sin x$ ..... $\dfrac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

625. $\sin x$ ..... $\dfrac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\dfrac{\pi}{6}$