Kolokwium nr 1: poniedziałek 12.10.2015, godz. 14:15-15:00, sale HS i EM, materiał zad. 1–27.

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona. (c.d.)
2. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Poziom A (z myślą o ocenie dostatecznej na wykładzie A)

Zadania do samodzielnego rozwiązania. Pomoc można uzyskać na konsultacjach u dowolnego prowadzącego lub podczas tutoringu prof. Damek (październikowe wtorki 14–17, pok. 901 lub s. 601; w dniu 13.10.2015 tutoring rozpocznie się z opóźnieniem – ok. 15:45-16:00, ale może potrwać nawet do 19:00). W miarę wolnego czasu wątpliwości mogą zostać wyjaśnione także na ćwiczeniach.

42. Przedstawić liczbę 0,123(45) w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

43. Przedstawić liczbę 0,1(270) w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego

44. $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$ **45.** $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$ **46.** $(0,(037))^{0,(3)}$

47. Zapisać ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{1}{11}$

48. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

49. Czy istnieją takie liczby naturalne $m,n>1$, że $\log_m n=13/7$?

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 13–14.10.2015 (grupy 2–5). Ewentualny wolny czas można poświęcić na zadania poziomu A.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

50. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x>0\Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1\Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1\Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32\Rightarrow x^6>64$
e) $x^6>64\Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32\Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64\Rightarrow x^7<128$

51. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n\cdot\binom{4n}{2n}<27^n\cdot\binom{4n}{n}.$$

52. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

53. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

OSZUSTWO **54.**
ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$
$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$
$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

55. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

56. Dowieść, że liczba $\log_{20}50$ jest niewymierna.

57. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

58. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

59. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

60. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

61. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

62. Dla liczby wymiernej dodatniej $q=m/n$, gdzie $m,n\in\mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3<q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$. Nie używać kalkulatora. Wolno wykonywać bezpośrednie obliczenia na liczbach całkowitych dodatnich mniejszych od 300.

Poziom C (dla aspirujących do oceny wyższej niż 4.0)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 13.10.2015 (grupa 1). Należy przyjść na ćwiczenia do grupy 1 ORAZ na ćwiczenia do jednej z pozostałych grup, gdzie omówione zostaną zadania poziomu B.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

63. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots=F_{n+1}\,,$$
gdzie F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1=F_2=1$ oraz $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

64. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest implikacja $x^7+55x^5+333x^3>1111\Rightarrow x^2<10$.

65. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$(n+49)^{50}\cdot(n+25C)^{24}>(n+50)^{49}\cdot(n+24C)^{25}\,.$$

66. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$(n+49)^{50}\cdot(n+25C)^{24}<(n+50)^{49}\cdot(n+24C)^{25}\,.$$

67. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:
P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)
F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)
N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że:
• $T(1)$ jest prawdziwe,
• dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(2n)$,
• dla każdej liczby naturalnej $n>7$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-7)$.
Wówczas:

a) $T(71)$ .... **b)** $T(72)$ .... **c)** $T(73)$ ....

d) $T(74)$ .... **e)** $T(75)$ .... **f)** $T(76)$ ....

g) $T(77)$ .... **h)** $T(771)\Rightarrow T(772)$ ....

i) $T(772)\Rightarrow T(773)$ .... **j)** $T(773)\Rightarrow T(774)$ ....

k) $T(773)\Rightarrow T(75)$ .... **l)** $T(73)\Rightarrow T(775)$ ....

m) $T(70)\Rightarrow T(777)$ .... **n)** $T(770)\Rightarrow T(77)$ ....

68. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

69. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia q spełniająca równość

$$q^q = 5\,.$$

70. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q>1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n<q$ oraz $m/n>q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25<27$, $125<128$).

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

71. $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,

72. $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

73. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

74. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

75. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

76. x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,

77. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

78. 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

79. 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

80. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

81. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

82. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

83. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

84. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

85. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

86. $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

87. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

88. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

89. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

90. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.