Kolokwium nr 2:
poniedziałek 19.10.2015, godz. 14:15-15:00, sale HS i EM, materiał zad. 1–62 (poziomy A i B).

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Poziom A (z myślą o ocenie dostatecznej na wykładzie A)

Zadania do samodzielnego rozwiązania. Pomoc można uzyskać na konsultacjach u dowolnego prowadzącego lub podczas tutoringu prof. Damek (październikowe wtorki 14–17, pok. 901 lub s. 601). W miarę wolnego czasu wątpliwości mogą zostać wyjaśnione także na ćwiczeniach.

91. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Która z liczb jest większa ?

92. $123456\cdot 123458$ czy 123457^2 **93.** $1000!$ czy $(500!)^2$ **94.** $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

95. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$ **96.** $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$

97. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$ **98.** $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$

99. 2^{1000} czy 3^{700} **100.** 5^{444} czy 3^{700} **101.** $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$ **102.** $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$

103. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$ **104.** $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$ **105.** $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$

106. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$ **107.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$ **108.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$

109. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$ **110.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12 **111.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$

112. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 20–21.10.2015 (grupy 2–5). Ewentualny wolny czas można poświęcić na zadania poziomu A.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

113. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}, \quad b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}, \quad c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}, \quad d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}.$$

Która z liczb jest większa:

114. $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$? **115.** 26^{99} czy 10^{151} ? **116.** 26^{99} czy 123^{65} ?

117. $\sqrt{37}-6$ czy $\dfrac{1}{10}$? **118.** $\left(\sqrt{37}-6\right)^{666}$ czy $\dfrac{1}{100^{100}}$? **119.** $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Wskazując odpowiednią liczbę naturalną k udowodnić nierówności $10^k<L<10^{2k}$.

120. $L=3972^{257}$ **121.** $L=257^{3972}$ **122.** $L=700!$

123. Niech $a=\sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa: a^{256} czy 256^a ?

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

124. .... $<2^{500}<$ ....

125. .... $<3^{2000}<$ ....

126. .... $<2^{10000}<$ ....

127. .... $<30^{10000}<$ ....

128. .... $<2^{2^{10}}<$ ....

129. .... $<4444^{4444}<$ ....

130. .... $<7777^{7777}<$ ....

131. .... $<2011^{2011}<$ ....

132. .... $<222^{5555}<$ ....

133. .... $<5555^{222}<$ ....

134. .... $<333^{333}<$ ....

135. .... $<10000!<$ ....

136. .... $<666!<$ ....

137. Udowodnić nierówność $n^{2^{27}}\leqslant 2^n$ dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

138. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2}\leqslant D\,.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k<W(n)<D\cdot n^k\,.$$

139. $W(n)=\dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **140.** $W(n)=\dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **141.** $W(n)=\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Poziom C (dla aspirujących do oceny wyższej niż 4.0)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 20.10.2015 (grupa 1). Należy przyjść na ćwiczenia do grupy 1 ORAZ na ćwiczenia do jednej z pozostałych grup, gdzie omówione zostaną zadania poziomu B.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

142. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 5000! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

143. $\ldots\ldots\ldots\ldots < 35000! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

144. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(10^5\right)! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

145. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

146. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

147. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

148. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{3} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

149. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{4} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

150. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10000}{5} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

151. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < \ldots\ldots\ldots\ldots$

152. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n^2 < \ldots\ldots\ldots\ldots$

153. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n^{10} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

154. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{4}} n! < \ldots\ldots\ldots\ldots$

155. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^5}{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

156. $\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{10}}{20} < \ldots\ldots\ldots\ldots$

Przy każdej z poniższych pięciu liczb n podaj w miejscu kropek liczbę cyfr liczby n oraz pierwszą (od lewej) cyfrę liczby n w zapisie dziesiętnym.

157. $n=\binom{10^{100}}{2}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

158. $n=\binom{10^{100}}{3}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

159. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{2}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

160. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{3}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

161. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{4}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

162. Wskazać taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000}+1<2^n\,.$$

163. Która z liczb jest większa: $\prod_{i=2}^{2015}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\sqrt[j]{j}-\sqrt[i]{i}\right)$ czy $10^{-1000000}$?

164. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{9n+16}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}\leqslant 2C\,.$$

165. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{9n+40}-\sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45}-\sqrt{4n+5}}\leqslant 5C\,.$$

Oszacować podane wyrażenia, gdzie $n\in\mathbb{N}$, od góry i od dołu przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

166. $\frac{2^n+10n^2}{2^n+n^4}$ **167.** $\frac{4^n+n^4}{2^n+n^2}$ **168.** $\frac{n!}{n!+10^n}$ **169.** $\frac{(n+2)!}{n!+10^n}$

170. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32}\leqslant 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.