Kolokwium nr 3:
poniedziałek 26.10.2015, godz. 14:15-15:00, s. HS i EM, materiał zad. 1–141 (poziomy A i B).

3. Szacowanie liczb i wyrażeń (c.d.).

Poziom A (z myślą o ocenie dostatecznej na wykładzie A)

Zadania do samodzielnego rozwiązania. Pomoc można uzyskać na konsultacjach u dowolnego prowadzącego lub podczas tutoringu prof. Damek (październikowe wtorki 14–17, pok. 901 lub s. 601). W miarę wolnego czasu wątpliwości mogą zostać wyjaśnione także na ćwiczeniach.

Dla podanej liczby x wskazać taką liczbę całkowitą n, że $n<x<n+1$.

171. $x=\frac{1}{5\sqrt{2}-7}$ **172.** $x=\frac{1}{4\sqrt{3}-7}$ **173.** $x=\frac{1}{3\sqrt{3}-5}$

174. $x=\frac{1}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$ **175.** $x=\frac{1}{3\sqrt{5}-7}$ **176.** $x=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}$

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 27–28.10.2015 (grupy 2–5). Ewentualny wolny czas można poświęcić na zadania poziomu A.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

177. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 8C$.

178. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n\leqslant 7C\,.$$

179. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[4]{n^4+80n^3}-n\leqslant 10C\,.$$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

180. $\frac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ **181.** $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ **182.** $\frac{\sqrt{4n^4+1}}{n^2+1}$ **183.** $\sqrt{n^2+4n}-n$

Dla podanego wyrażenia $W(n,k)$ dobrać odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n,k)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

184. $\dfrac{\sqrt{n^k+1}}{n^6+n^5}$ **185.** $\dfrac{\sqrt{n^6+n^5}}{n^k+1}$ **186.** $\sqrt{n^8+n^k}-n^4$

Poziom C (dla aspirujących do oceny wyższej niż 4.0)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 27.10.2015 (grupa 1). Należy przyjść na ćwiczenia do grupy 1 ORAZ na ćwiczenia do jednej z pozostałych grup, gdzie omówione zostaną zadania poziomu B.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

187. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$.
W wersji trudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D \leqslant 2C$.

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

188. $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ **189.** $\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$

190. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{4}{n^{3/4}} < \sqrt[n]{n} < 1+\dfrac{4}{n^{3/4}}$.

191. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{1000}{n^{999/1000}} < \sqrt[n]{n} < 1+\dfrac{1000}{n^{999/1000}}$.

Przympomnienie fragmenu rachunków z wykładu:

Niech $c_n=\sqrt[n]{n}-1$. Wówczas

$$n=(1+c_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_n^k\,,$$

skąd

$$\binom{n}{k}c_n^k<n$$

dla $n \geqslant k$.