4. Ciągi liczbowe, zbieżność.

Poziom C

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 10.11.2015 (grupa 1).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

Na pierwszej godzinie ćwiczeń (14:15–15:00) będzie kolokwium z tego samego zakresu materiału, co poprzednio.

Drugą godzinę ćwiczeń zaczniemy od omówienia zadań 55 i 56 z kolokwium 51.

217. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{\varepsilon\geqslant 1}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-1|\leqslant\varepsilon\ .$$

Czy stąd wynika, że

217.1 ciąg (a_n) jest zbieżny ....

217.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny ....

217.3 ciąg (a_n) jest ograniczony ....

217.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....

217.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....

217.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....

217.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....

217.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich ....

217.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych ....

217.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni ....

217.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny ....

217.12 $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....

217.13 $\underset{n}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ ....

217.14 $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n>0$ ....

217.15 $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ ....

217.16 $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n>0$ ....

217.17 $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ ....

217.18 $\underset{n}{\exists}\ a_n>0$ ....

217.19 $\underset{n}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ ....

218. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n>1000}{\forall}\ |a_n-100|<10\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,

d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,

e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,

f) $a_{666}<7777777$,

g) $a_{1111} > 88$,
h) $\underset{n>1729}{\forall} |a_n - 100| < 1$,
i) $\underset{n>345}{\forall} |a_n - 100| < 17$,
j) $\underset{n>5555}{\forall} |a_n - 99| < 13$,
k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
l) $\underset{n>444}{\exists} |a_n - 95| < 37$,
m) $\underset{n>4444}{\exists} |a_n - 80| < 37$,
n) $\underset{n<444}{\exists} |a_n - 95| < 37$,
o) $\underset{n<4444}{\exists} |a_n - 80| < 37$,
p) $\underset{m}{\forall} \underset{n>m}{\exists} a_n > 0$,
q) $\underset{n>1331}{\forall} |a_n - 66| > 12$,
r) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 7$,
s) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 17$,
t) $\underset{m>123}{\forall} \underset{n>45678}{\forall} |a_n - a_m| < 27$,
u) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 37$,
v) $\underset{m<123}{\exists} \underset{n<456}{\exists} |a_n - a_m| < 3$,
w) $\underset{m>12345}{\forall} \underset{n>67890}{\forall} |a_n + a_m| < 210$,
x) $\underset{m>1296}{\forall} \underset{n>7776}{\forall} |a_n + a_m| < 222$,
y) $\underset{m>1024}{\forall} \underset{n>8192}{\forall} |a_n + a_m| > 128$,
z) $\underset{n}{\exists} a_n < 92$,
ż) $\underset{n}{\exists} a_n > 91$.

219. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

220. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^3}+\frac{4n^2+n}{n^3+1}+\frac{4n^2+2n}{n^3+2}+\frac{4n^2+3n}{n^3+3}+\frac{4n^2+4n}{n^3+4}+\ldots+\frac{9n^2-n}{n^3+5n-1}+\frac{9n^2}{n^3+5n}\right).$$

221. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

222. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{16n^2+1}+\sqrt{25n^2+1}+\sqrt{36n^2+1}+\ldots+\sqrt{n^4+1}}{n^k}$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.