# 4. Ciągi liczbowe, zbieżność (c.d.)
# 5. Kresy zbiorów

## Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 17–18.11.2015 (grupy 2–5).
**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

**223.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right).$$

**224.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+3}{\sqrt{n^{10}+3}}+\frac{5n^3+6}{\sqrt{n^{10}+6}}+\frac{5n^3+9}{\sqrt{n^{10}+9}}+\frac{5n^3+12}{\sqrt{n^{10}+12}}+\ldots+\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}\right).$$

**225.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+1}}+\frac{4n^2+2}{n^3+\sqrt{n^6+2}}+\frac{4n^2+3}{n^3+\sqrt{n^6+3}}+\frac{4n^2+4}{n^3+\sqrt{n^6+4}}+\ldots+\frac{4n^2+6n}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}\right).$$

**226.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

**227.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru $k$, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru $Z$ oraz określ, czy kresy należą do zbioru $Z$.
**Nie wszystkie zadania będą omówione szczegółowo na ćwiczeniach – studenci powinni umieć wskazać zadania, które sprawiły największą trudność.**

**228.** $Z=\left\{\frac{1}{n^2-7}:n\in\mathbb{N}\right\}$

**229.** $Z=\left\{x^n:x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$

**230.** $Z=\left\{\sqrt{n^2+3}-n:n\in\mathbb{N}\right\}$

**231.** $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n:n\in\mathbb{N}\}$

**232.** $Z=\left\{\frac{n}{3n+7}:n\in\mathbb{N}\right\}$

**233.** $Z=\left\{\frac{n}{3n-7}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**234.** $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

**235.** $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1}:\, -5\leqslant x<3\right\}$

**236.** $Z=\left\{\frac{1}{x^2+2}:\, x\in\mathbb{R}\right\}$

**237.** $Z=\left\{\frac{x^2+1}{x^2+2}:\, x\in\mathbb{R}\right\}$

**238.** $Z=\left\{x^2+4x+4:\, x\in(-6,1)\right\}$

**239.** $Z=\left\{x^2+4y+4:\, x,y\in(-6,1)\right\}$

**240.** $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+4}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**241.** $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+6}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**242.** $Z=\left\{x^2:\, x\in(-3,2)\right\}$

**243.** $Z=\left\{x^3:\, x\in(-3,2)\right\}$

**244.** $Z=\left\{\frac{1}{5n-13}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**245.** $Z=\left\{\frac{\sqrt[n]{2}}{n}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**246.** $Z=\left\{n^2-5n:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**247.** $Z=\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**248.** $Z=\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+2}:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**249.** $Z=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\wedge 2m^2<3n^2\right\}$

**250.** $Z=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\wedge 2^m>3^n\right\}$

**251.** $Z=\left\{7n+\frac{n!+n^{2009}+1}{n!+n^{2009}+4}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**252.** $Z=\left\{x^2:\, x\in(-4,9)\right\}$

**253.** $Z=\left\{\frac{n}{2n+3}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

**254.** $Z=\left\{\binom{2008}{n}: n\in\mathbb{N}\wedge n\leqslant 2008\right\}$

**255.** $Z=\left\{\frac{n}{n+m}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**256.** $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right)^2: n\in\mathbb{N}\right\}$

**257.** $Z=\left\{\sqrt{n^2+2n}-n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**258.** $Z=\left\{\sqrt[n]{3}-\sqrt[m]{2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**259.** $Z=\left\{\frac{7}{n}-3m: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**260.** $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**261.** $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**262.** $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**263.** $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**264.** $Z=\left\{\frac{5m-2n}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**265.** $Z=\left\{\frac{m}{n+7}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**266.** $Z=\left\{x^2: x\in(-2,1)\right\}$

**267.** $Z=\left\{x^3: x\in(-2,1)\right\}$

**268.** $Z=\left\{3x^2+y^3: x,y\in(-2,1)\right\}$

**269.** $Z=\left\{\sqrt{n^2+n}-n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**270.** $Z=\left\{\sqrt{n^2+n+1}-n: n\in\mathbb{N}\right\}$

**271.** $Z=\{|2-\log_2 x|: x\in(1,8]\}$

**272.** $Z=\{|2-\log_2 x|: x\in(1,16]\}$

**273.** $Z=\{|2-\log_2 x|: x\in(1,32]\}$

**274.** $Z=\left\{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{2m-3}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**275.** $Z=\{\log_2(n+7)-\log_2 n: n\in\mathbb{N}\}$

**276.** $Z=\left\{\frac{m+n}{\sqrt{mn}}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**277.** $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**278.** $Z=\left\{\frac{1}{n^2-22}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**279.** $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+1}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**280.** $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+2}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**281.** $Z=\{x-2y: x,y\in\mathbb{R} \wedge 16<x\leqslant 28 \wedge 3<y\leqslant 4\}$

**282.** $Z=\{|x-y|: x,y\in\mathbb{R} \wedge 16<x\leqslant 28 \wedge 3<y\leqslant 4\}$

**283.** $Z=\left\{\frac{1}{7n-30}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**284.** $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^2}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**285.** $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^3}: n\in\mathbb{N}\right\}$

**286.** $Z=\left\{\frac{1}{7m-30}+\frac{1}{(7n-30)^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**287.** $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

**288.** $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

**289.** $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^2\cdot n^{6}\leqslant m^{6}\leqslant 2^3\cdot n^{6}\right\}$

## Poziom C

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 17.11.2015 (grupa 1).
**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

**290.** Zbiory $A$ i $B$ są niepuste i ograniczone. Zbiór $B$ jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\left\{\frac{a}{b}: a\in A,\ b\in B\right\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

**291.** $A$ jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A=-3$, $\sup A=2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|: a\in A\}$ ? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

**292.** Podać przykład takich zbiorów $A$, $B$, że $\inf A=2$, $\sup A=7$, $\inf B=3$, $\sup B=10$, $\inf(A\cap B)=4$, $\sup(A\cap B)=6$, $A\cap\mathbb{N}=B\cap\mathbb{N}=\emptyset$.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$ ?

**293.** $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a<g+\varepsilon\right)$

**294.** $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, |a-g|<\varepsilon\right)$

**295.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-2\varepsilon\right)$

**296.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

**297.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{1}{n}\right)$

**298.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

**299.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a<g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

**300.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

**301.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>\varepsilon\right)$

**302.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

**303.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

**304.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a\geqslant g-\varepsilon\right)$

**305.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a\geqslant g-\varepsilon\right)$

**306.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

**307.** $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

**308.** $\left(\underset{a\in A}{\exists} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

**309.** $\left(\underset{a\in A}{\exists} a^2\geqslant 0\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

**310.** $\left(\underset{a\in A}{\exists} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru $Z$ oraz określ, czy kresy należą do zbioru $Z$.

**311.** $Z=\left\{\frac{3}{n}-\frac{5}{m^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**312.** $Z=\left\{\frac{mn^2}{m^2+n^4} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**313.** $Z=\{|x+y|-|x|-|y| : x,y\in\mathbb{R}\}$

**314.** $Z=\left\{\frac{1}{5^n-3^m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**315.** $Z=\left\{\dfrac{mn}{m^2+9n^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**316.** $Z=\left\{\dfrac{m^2+5n^2}{mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**317.** $Z=\left\{\dfrac{3m^2+7n^2}{mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$

**318.** $Z=\left\{\dfrac{m+n}{p}:\ m,n,p\in\mathbb{N}\wedge m^2>2p^2\wedge n^2>3p^2\right\}$

**319.** $Z=\left\{\dfrac{mn}{m^2+n^2+1}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$

## Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

TWIERDZENIE **320.** Niech $A$ i $B$ będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech $C=\{a-b:\ a\in A\wedge b\in B\}$. Wtedy $\inf C=\boxed{\inf A-\sup B}\boxed{\sup B-\inf A}$ .

*Dowód:*

Niech $d=\inf A$ i $g=\sup B$. Wtedy z warunku $d=\inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$

oraz

(2) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a<d+\varepsilon}\boxed{a>d-\varepsilon}$ .

Podobnie z warunku $g=\sup B$ wynika

(3) $\boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$

oraz

(4) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\varepsilon}$ .

Chcemy wykazać, że $\inf C=e$, gdzie $e=\boxed{d-g}\boxed{g-d}$ , czyli, że

(5) $\boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c\leqslant e}\boxed{c\geqslant e}$

oraz

(6) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$ .

$\boxed{\text{W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).}}$

$\boxed{\text{Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).}}$

$\boxed{\text{Dowolna}}\boxed{\text{Istnieje}}$ liczba $c\in C$ $\boxed{\text{jest}}\boxed{\text{będąca}}$ postaci $c=a-b$, gdzie $a\in A$ i $b\in B$. Z nierówności $\boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$ i $\boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$ otrzymujemy $\boxed{a-b\leqslant e}\boxed{a-b\geqslant e}$ , co dowodzi (5).

$\boxed{\text{Załóżmy}}\boxed{\text{Wykażemy}}$ teraz prawdziwość warunku (6).

$\boxed{\text{Niech } \varepsilon \text{ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy}}$

$\boxed{\text{Znajdziemy taką liczbę dodatnią } \varepsilon\text{, dla której}}$

istnieje $a\in A$ takie, że $\boxed{a>d-\varepsilon}\boxed{a<d+\frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b\in B$ takie, że $\boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\frac{\varepsilon}{2}}$ . Zatem liczba $c=a-b$ spełnia nierówność $\boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$ , co kończy dowód warunku (6).