6. Szeregi liczbowe
7. Dziedzina funkcji

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 24–25.11.2015 (grupy 2–5).
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

321. Obliczyć $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}$, a następnie znaleźć $\lim_{n\to\infty}S_n$.

322. Obliczyć sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-6)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$

Wskazówka: W kolejnych pięciu zadaniach szukać przykładu szeregu geometrycznego.

323. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\,.$$

324. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2\,.$$

325. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k=2\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\,.$$

326. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{4}\,.$$

327. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\frac{1}{5}\,.$$

328. Dowieść, że $6<\sum_{n=1}^{2047}\frac{1}{n}<11$.

329. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f, gdzie $f(x)$ jest dane wzorem

330. $\log_2\log_2 x$ **331.** $\log_2\log_2\log_2 x$ **332.** $\log_2\log_2\log_3 x$ **333.** $\log_2\log_3\log_2 x$

334. $\log_3\log_2\log_2 x$ **335.** $\log_3\log_2\log_2|x|$ **336.** $\log_3\log_2\Big|\log_2|x|\Big|$

337. $\log_3\left|\log_2\Big|\log_2|x|\Big|\right|$ **338.** $\log_2\sin x$ **339.** $\sqrt{2\sin x+1}$ **340.** $\sqrt{x^{2014}-x^{2013}}$

341. $\sqrt{x^{2014}+x^{2013}}$ **342.** $\sqrt{x^{2014}-x^{2012}}$ **343.** $\sqrt{x^{2013}-x^{2012}}$ **344.** $\sqrt{x^{2013}+x^{2012}}$

345. $\sqrt{x^{2013}-x^{2011}}$ **346.** $\log_{(x^2-1)}(x^2-4)$ **347.** $\log_{(x^2-4)}(x^2-1)$

Poziom C – 24.11.2015 (grupa 1)

348. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}\,.$$

349. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

350. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

351. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = 6, \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1+a_2+\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 3\,.$$

Obliczyć sumę szeregu: **352.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **353.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

354. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

355. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1}\,.$$