Ciągłość i inne własności funkcji

Poziom B (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 1–2.12.2015 (grupy 2–5).
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

356. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ, a następnie udowodnić, że

$$\underset{x\in(27-\delta,\,27+\delta)}{\forall} \left|\sqrt[3]{x}-C\right| < \frac{1}{1000}\,.$$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby $\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

357. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$

358. $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

359. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$

360. $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

361. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$

362. $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x)-f(x_0)|<C\cdot\delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta>0$ oraz dowolnych $x, x_0\in D_f$ spełniających warunek $|x-x_0|<\delta$.

363. $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[1,+\infty)$

364. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

365. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

366. $f(x)=x^3$, $D_f=[-10,5]$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek $\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

367. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$

368. $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$

369. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

370. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

371. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

372. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|$.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Poziom C – 1.12.2015 (grupa 1)

Dla podanej funkcji f wskazać taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leqslant M$.

373. $f(x)=e^{\sin x}$ **374.** $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$ **375.** $f(x)=\dfrac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

OSZUSTWO **376.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem $f(c)=g(c)$, co należało dowieść. □

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

377. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

378. Dla których liczb

$$n\in\left\{2,\,4,\,10,\,20,\,50,\,100,\,200,\,500,\,1000,\,10^5,\,10^{10},\,10^{30},\,10^{100},\,10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji $f(x)=2^x$ przecina wykres funkcji $g(x)=x^n+4$, jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

379. Dowieść, że równanie $x^2=25\pi^2\cdot\cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

380. Dowieść, że równanie $x^2=25\pi^2\cdot\cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

381. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8}\leqslant 6\cdot C\,.$$

382. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x}\leqslant N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x}>N-1\,.$$

383. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{4000}\,.$$