1075. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$
Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział $[-1,1)$. Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3}\,.$$
Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru
$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$
$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$
dla $a=0$, $b=0$, $c=1$ otrzymujemy
$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln(x^2+x+1)}{6}+C\,. \tag{2}$$
W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=0$. Zgodnie ze wzorem (1)
$$f(0)=0\,,$$
natomiast wzór (2) daje
$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})-\frac{\ln 1}{3}+\frac{\ln 1}{6}+C=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+C\,.$$
Stąd
$$C=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$
i ostatecznie
$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\,. \tag{3}$$
Przyjmując $x=-1$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $-f(-1)$. Z drugiej strony wzór (3) daje
$$f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right)-\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 1}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\ln 2}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\frac{\ln 2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}$.