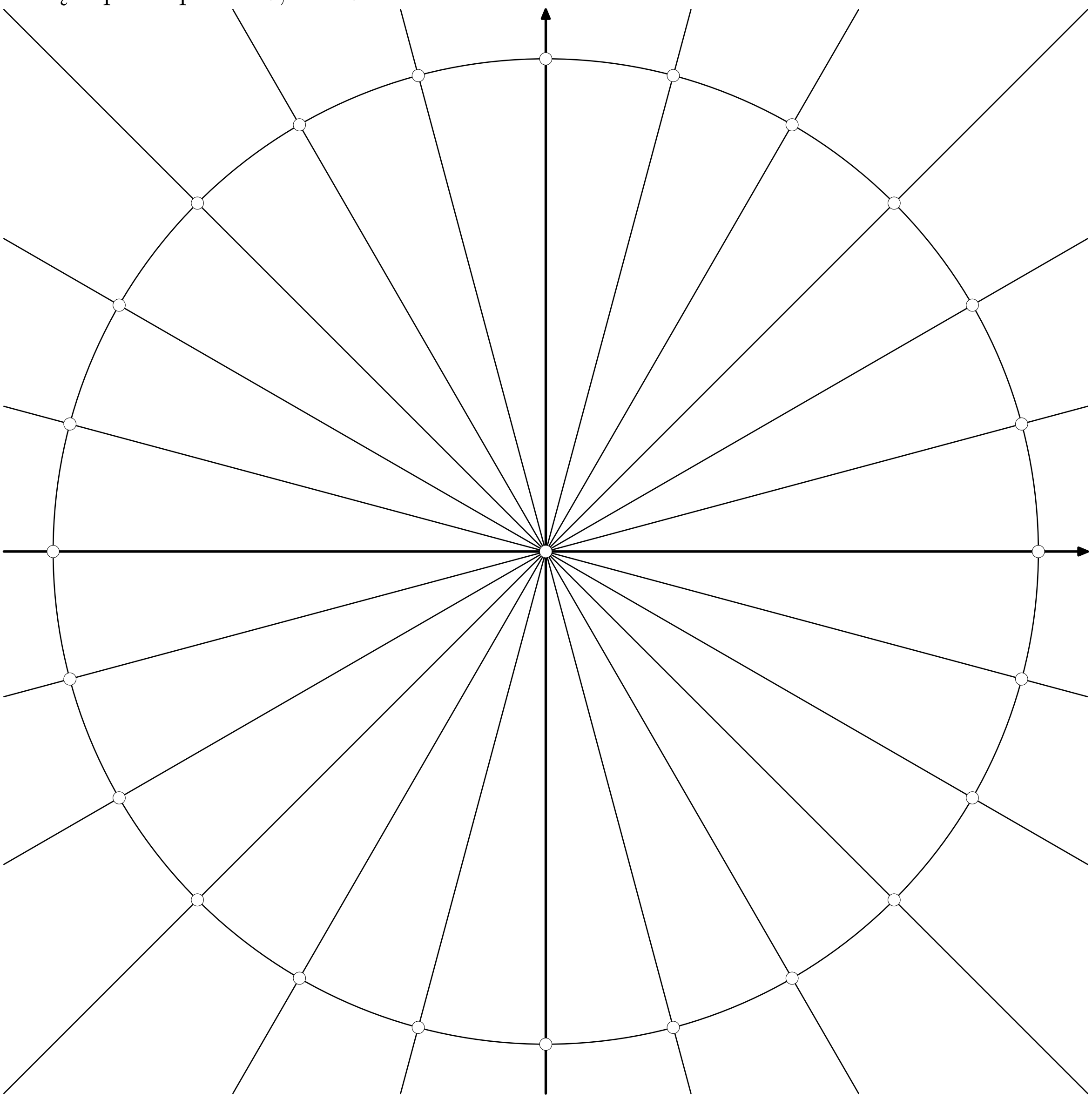
Egzamin, 20.06.2016, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co $15°$.

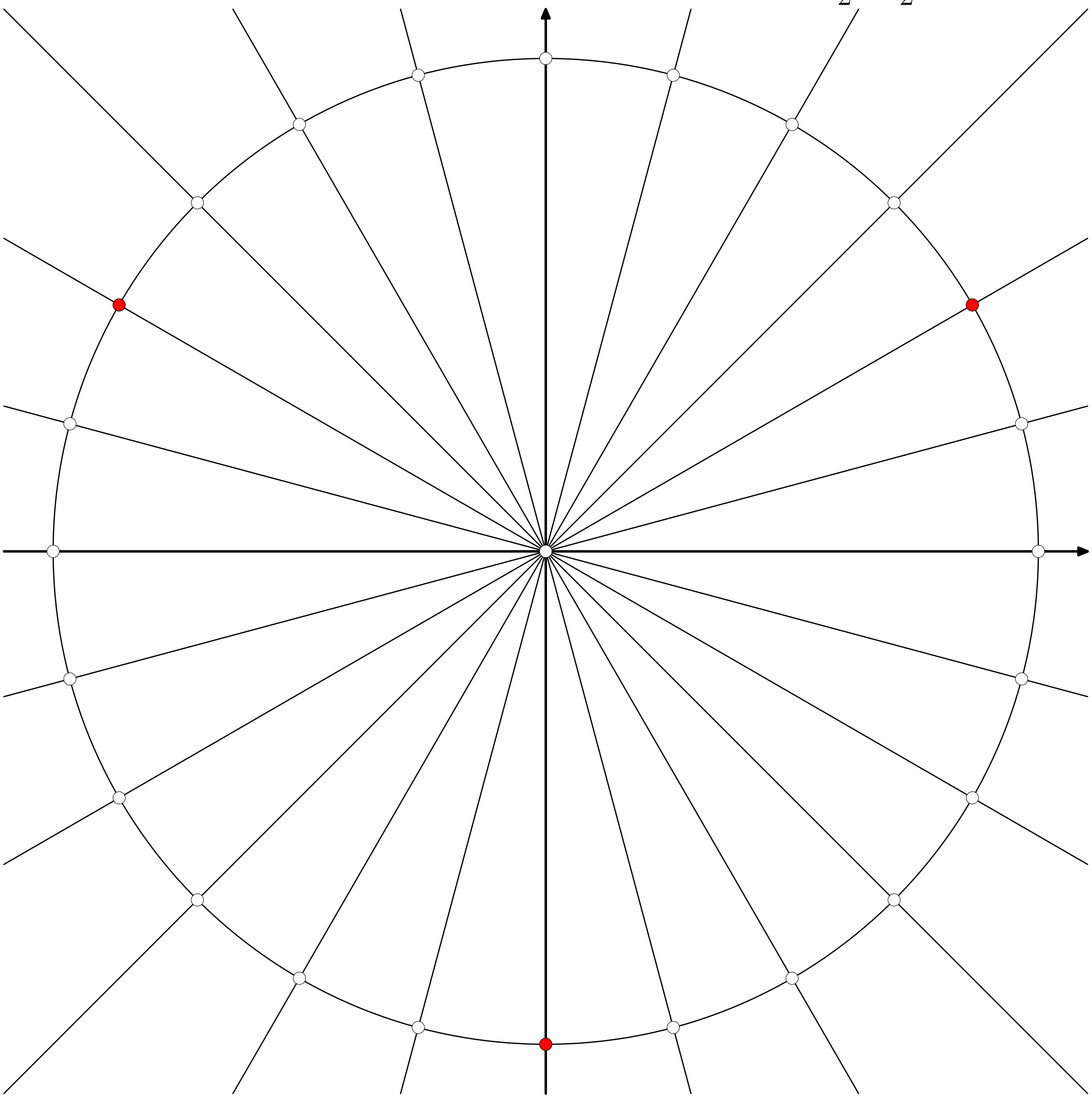


Rozwiązanie:

Dane w zadaniu równanie jest spełnione przez liczbę $z = -i$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leża na okręgu jednostkowym co $120°$.

Inaczej: liczba i ma moduł 1 i argument $\pi/2$, a zatem jej pierwiastki sześcienne mają moduł 1 i argumenty $\pi/6 + 2k\pi/3$ dla $k = 0, 1, 2$, czyli odpowiednio $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 3 rozwiązania: $-i$ oraz $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.



Zadanie **12.** **(10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \frac{2\cdot2\cdot0}{3\cdot3\cdot3} = 0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+5)} \geqslant \frac{(2n+1)\cdot(2n+3)}{(3n+2)\cdot(3n+5)\cdot(3n+8)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{2n-1}{3n-1} \geqslant \frac{2n+3}{3n+8}\,,$$

$$(2n-1)\cdot(3n+8) \geqslant (2n+3)\cdot(3n-1)\,,$$

$$6n^2+13n-8 \geqslant 6n^2+7n-3\,,$$

$$6n \geqslant 5\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie **13. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{x+1}, \qquad x=t^2-1$$

i formalnie

$$dx=2t\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,3]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int\limits_1^2 15\cdot\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=30\cdot\int\limits_1^2 t^4-t^2\,dt=30\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=30\cdot\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=6\cdot 31-10\cdot 7=186-70=116\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{(x-1)\cdot x^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x}\,,$$

$$1=A\cdot x^2+B\cdot(x-1)+D\cdot(x-1)\cdot x\,,$$

$$1=Ax^2+Bx-B+Dx^2-Dx\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+D \\ 0 &= B-D \\ 1 &= -B\,, \end{cases}$$

skąd $B=-1$, $D=-1$ i $A=1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2}=\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\,dx=\ln|x-1|+\frac{1}{x}-\ln|x|+C\,.$$

Zadanie **15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę naturalną n, że krzywa o równaniu $y=x^n$ dzieli zbiór

$$\left\{(x,y):\ x\in[0,1]\ \wedge\ x^5\leqslant y\leqslant x\right\}$$

na dwa obszary o równych polach.

Rozwiązanie:

Warunki zadania będą spełnione, jeżeli

$$\int_0^1 x-x^n\,dx=\int_0^1 x^n-x^5\,dx\,,$$

co możemy przepisać kolejno jako

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{1}=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{x=0}^{1}\,,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{6}\,,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{n+1}\,,$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{n+1}\,,$$

$$3=n+1\,,$$

$$n=2\,.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczbę $n=2$.

Zadanie **16. (10 punktów)**
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^{2n}}{n!\cdot n^n}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(2n+2)!\cdot x^{2n+2}}{(n+1)!\cdot (n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot n^n}{(2n)!\cdot x^{2n}}\right| =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot|x|^2}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{x^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to 4\cdot\frac{x^2}{e}\,.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $4\cdot\frac{x^2}{e}$.

Jeżeli $4\cdot\frac{x^2}{e}<1$, czyli $|x|<\frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (1) jest zbieżny.
Jeżeli zaś $4\cdot\frac{x^2}{e}>1$, czyli $|x|>\frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (1) jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Zadanie **21. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+1+1}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t=x-1, \qquad x=t+1$$

i formalnie

$$dx=dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1,0]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\limits_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\left(\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}\Bigg|_{t=-1}^{0}\right)+\left(\operatorname{arctg} t\Bigg|_{t=-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{\ln 1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+\operatorname{arctg} 0-\operatorname{arctg}(-1)=0-\frac{\ln 2}{2}+0-\frac{-\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}$.

Zadanie **22. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.
Rozwiązanie:
Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$I(x)=\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cdot\sin 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 3\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\cdot\cos 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot I(x),$$

co prowadzi do

$$4\cdot I(x)=2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-9\cdot I(x),$$

skąd

$$I(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{13}+C.$$

Zadanie **23.** **(10 punktów)**

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^\infty \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4} = \int\limits_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4} + \int\limits_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{0+x^4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $4-\pi<1$.

Podobnie

$$\int\limits_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{x^5+x^4} \leqslant \int\limits_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{x^5+0} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{5-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $5-\pi>1$.

Zadanie **24. (10 punktów)**
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n} \,. \tag{2}$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x.

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}\right|} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = b_n \,.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot |x|}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \to e \cdot |x| \,.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny do $0 < 1$, a w konsekwencji szereg (2) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty > 1$, a w konsekwencji szereg (2) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $\frac{1}{e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{e}$.

Zadanie **25. (10 punktów)**
Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie:
Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

gdzie

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\ln|g(x)|+C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2\frac{x^2\,dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\int_0^2\frac{3x^2\,dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\ln\left|x^3+1\right|\Big|_{x=0}^{2}=\frac{1}{3}\cdot(\ln 9-\ln 1)=\frac{2\ln 3}{3}.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

Zadanie **26. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin^{2017} n^{2016}\right|}{n^{2/3}+n^{3/2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}+n^{3/2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0+n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \,,$$

bo $3/2 > 1$.

Zadanie **31. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{2\pi} \cos^6 x\, dx$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\cos^6 x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^6 = \frac{z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15z^{-2} + 6z^{-4} + z^{-6}}{64} =$$
$$= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}.$$

Pamiętając, że całka oznaczona z cosinusa po pełnym okresie jest równa 0, otrzymujemy

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^6 x\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{5}{16}\, dx = 2\pi \cdot \frac{5\pi}{16} = \frac{5\pi}{8}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{8}$.

Zadanie **32. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^\pi \sin^{2016} x - \cos^{2016} x \, dx$.

Rozwiązanie:

Z równości
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
oraz
$$|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$$
otrzymujemy
$$\int\limits_0^\pi \cos^{2016} x\, dx = \int\limits_0^\pi \sin^{2016}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2016}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2016}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016} x\, dx + \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2016} x\, dx =$$
$$= \int\limits_0^\pi \sin^{2016} x\, dx\,,$$
skąd wynika, że dana w zadaniu całka ma wartość zero.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka oznaczona ma wartość 0.

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: Funkcje $\sin^{2016}$ i $\cos^{2016}$ są całkowane po pełnym okresie równym π, a przy tym jest to ta sama funkcja, tylko przesunięta o $\pi/2$.

Zadanie **33. (10 punktów)**

Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int\limits_1^x (\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x)=(\log_2 x-3)^{2017}$, mamy $f'(x)<0$ dla $x\in(1,8)$ oraz $f'(x)>0$ dla $x>8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1,8)$ i rosnąca w przedziale $(8,+\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Zadanie **34. (10 punktów)**

Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k\leqslant 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{2^{kn}\cdot \text{jakiśsinus}\, 2^n x}{333^n}\,,$$

gdzie $f^{(0)}=f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{kn}}{333^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^k}{333}\right)^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{256}{333}\right)^n<+\infty\,,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x)=\frac{2^{9n}\cos 2^n x}{333^n}=\left(\frac{512}{333}\right)^n\cdot\cos 2^n x\,,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 256/333 bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 512/333 większym od 1.

Zadanie **35. (10 punktów)**

Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}}\, dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{\sqrt{3}} \,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{3}}\, dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{3}}-1}{2\sqrt{3}} \,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}} \cos nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot \frac{\sqrt{3}}{n^2+3} \,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}} \sin nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot \frac{-n}{n^2+3} \,.$$

Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{3}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B = e^{2\pi\sqrt{3}}+1 \,.$$

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0, 2\pi)$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{3}} & \text{dla} \quad x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2} & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0 = \frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{2\pi\sqrt{3}} \,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot \frac{\sqrt{3}}{n^2+3} \,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot \frac{-n}{n^2+3} \,,$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f, gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x=0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2} = \frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{2\pi\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3} \,.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2}-\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{2\pi\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}e^{2\pi\sqrt{3}}+\pi\sqrt{3}-e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2\pi\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}e^{2\pi\sqrt{3}}+\pi\sqrt{3}-e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{6\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}B-A}{6A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,.$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{3}}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)^2}{6\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{n^2+3}\right)^2+\left(\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+3}\right)^2\right)\,,$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}+1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)^2}{6\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{6\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{2\sqrt{3}}-\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{6\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}e^{2\pi\sqrt{3}}+\pi\sqrt{3}-e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{6\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}e^{2\pi\sqrt{3}}+\pi\sqrt{3}-e^{2\pi\sqrt{3}}+1}{6\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}B-A}{6A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}\,.$$

Zadanie **36. (10 punktów)**

Dowieść. że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ też jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leqslant \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a z założeń zadania

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

dostajemy nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$