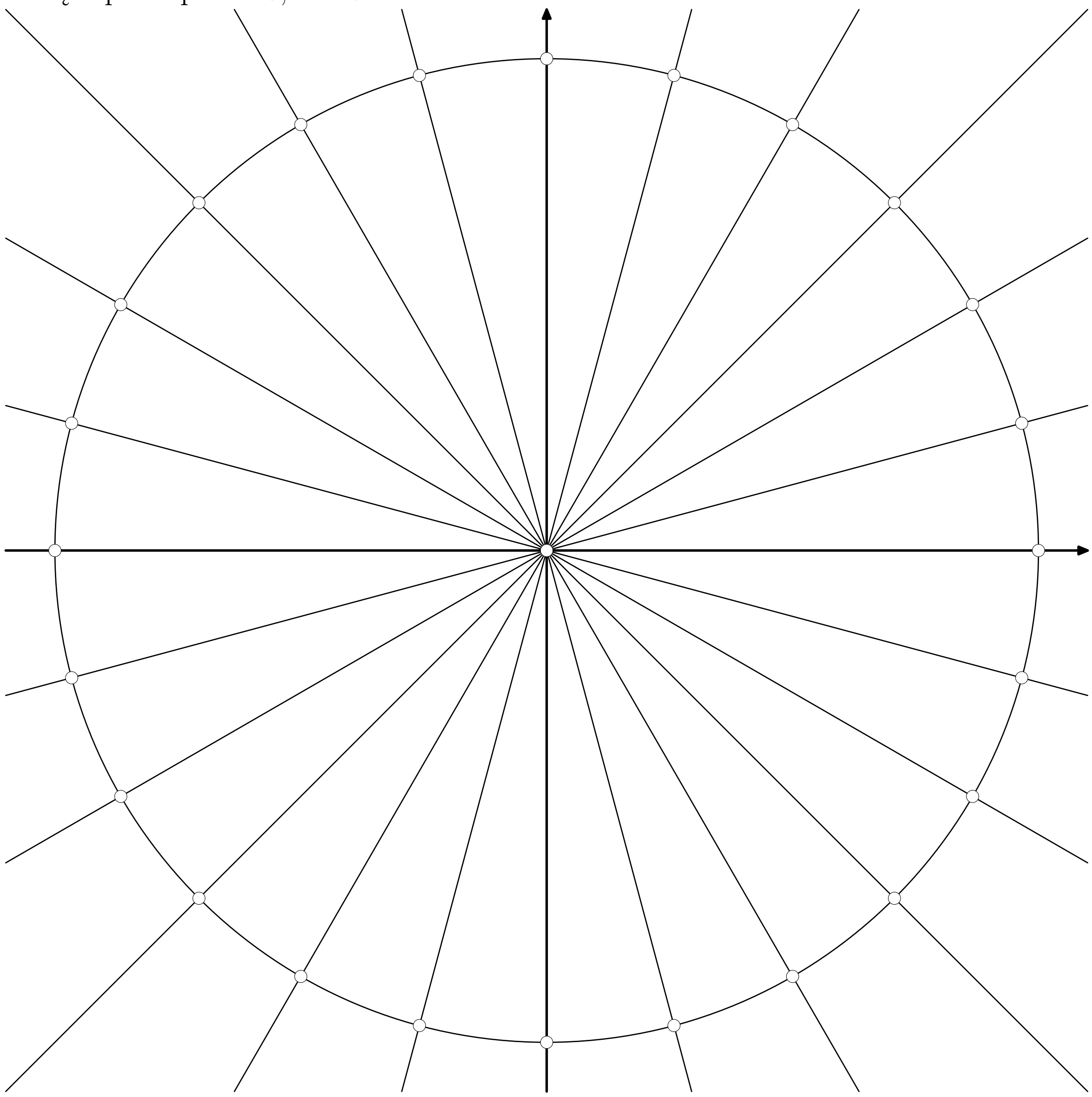
Egzamin, 20.06.2016, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Zadanie **12. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

Zadanie **13. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Zadanie **15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę naturalną n, że krzywa o równaniu $y=x^n$ dzieli zbiór

$$\left\{(x,y):\ x\in[0,1]\ \wedge\ x^5\leqslant y\leqslant x\right\}$$

na dwa obszary o równych polach.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^{2n}}{n!\cdot n^n}\ .$$

Zadanie **21. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Zadanie **22. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

Zadanie **23. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\pi}\,dx}{x^5+x^4}$.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot x^{n^2}}{(n!)^n}\ .$$

Zadanie **25. (10 punktów)**

Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right)\ .$$

Zadanie **26. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

Zadanie **31. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{2\pi} \cos^6 x\, dx$.

Zadanie **32. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2016} x - \cos^{2016} x\, dx$.

Zadanie **33. (10 punktów)**

Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int\limits_1^x (\log_2 t-3)^{2017}\, dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Zadanie **34. (10 punktów)**

Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Zadanie **35. (10 punktów)**

Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}}\, dx=\frac{e^{2\pi\sqrt{3}}-1}{\sqrt{3}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{3}}\, dx=\frac{e^{4\pi\sqrt{3}}-1}{2\sqrt{3}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}}\cos nx\, dx=\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{n^2+3}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{3}}\sin nx\, dx=\left(e^{2\pi\sqrt{3}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+3}\,.$$

Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A=e^{2\pi\sqrt{3}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B=e^{2\pi\sqrt{3}}+1\,.$$

Zadanie **36. (10 punktów)**

Dowieść. że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ też jest zbieżny.