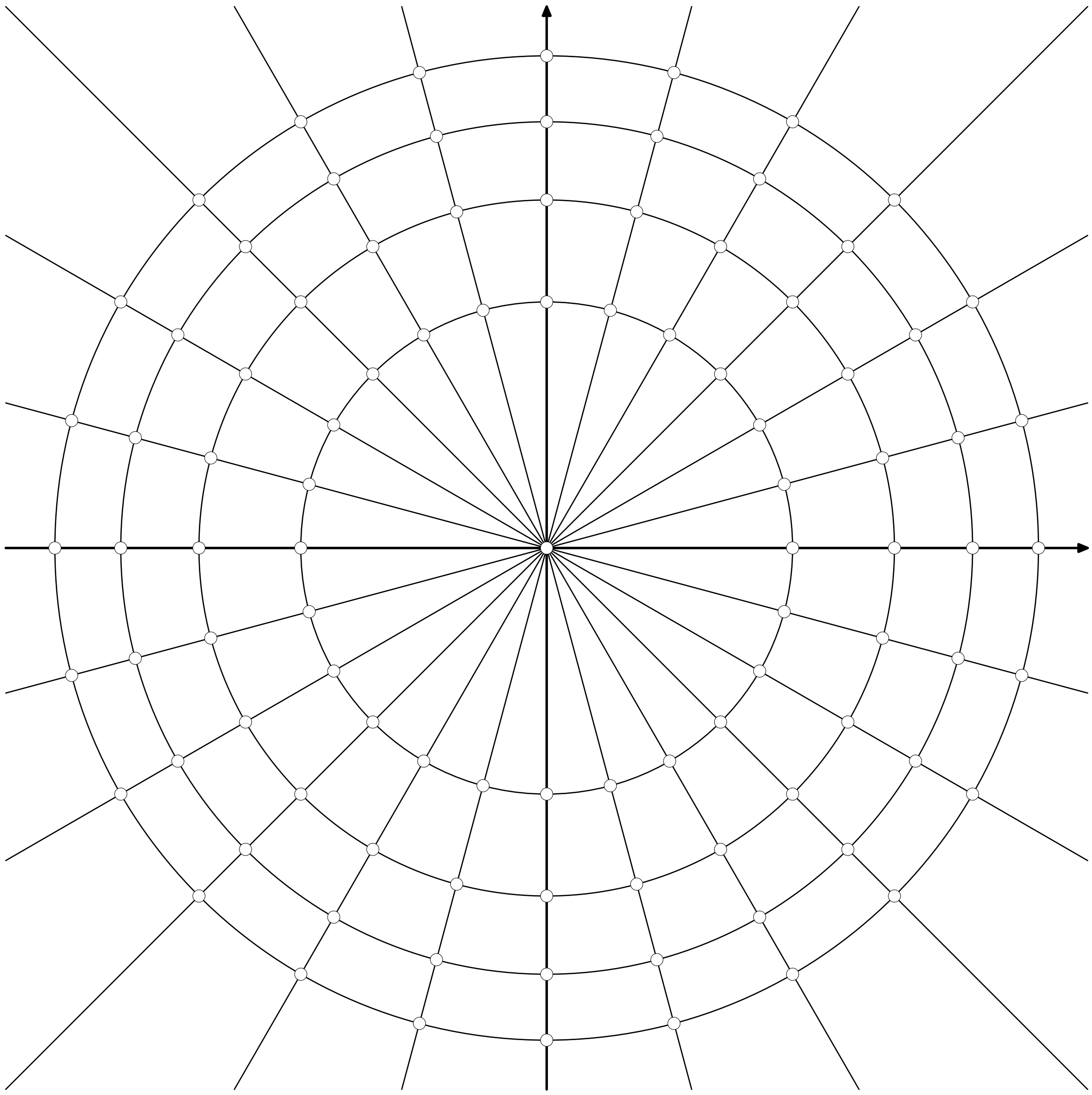
Egzamin, 10.09.2016, godz. 12:00-15:00

Zadanie **11. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4=-4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.

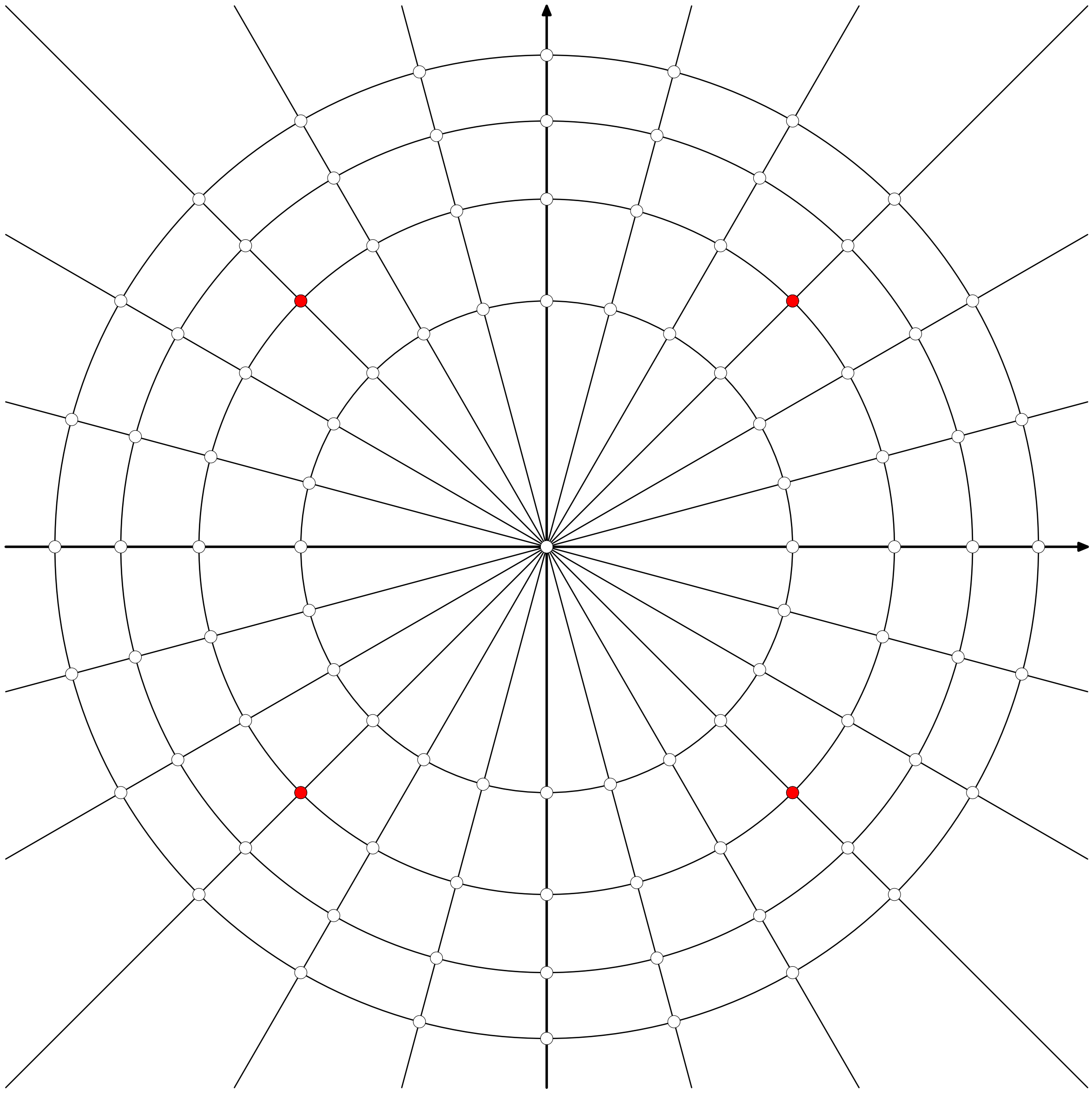


Rozwiązanie:

Liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π, w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. Pozostałe trzy rozwiązania danego w zadaniu równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90°.

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π, a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4+k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 4 rozwiązania: $\pm_1 1\pm_2 i$.



Zadanie **12. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{7}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{10}{n}\right)}=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot0}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}\geqslant\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)\cdot(3n+13)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{n}{3n+1}\geqslant\frac{n+3}{3n+13}\,,$$

$$n\cdot(3n+13)\geqslant(n+3)\cdot(3n+1)\,,$$

$$3n^2+13n\geqslant 3n^2+10n+3\,,$$

$$3n\geqslant 3\,,$$

$$n\geqslant 1\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie **13. (10 punktów)**
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n} . \tag{1}$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy
$$\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot x^{4n+4}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}} \right| =$$
$$= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^4}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} =$$
$$= \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to 16 \cdot \frac{x^4}{e} .$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $16 \cdot \frac{x^4}{e}$.

Jeżeli $16 \cdot \frac{x^4}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (1) jest zbieżny.
Jeżeli zaś $16 \cdot \frac{x^4}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (1) jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$. Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\,,$$

$$1 = A\cdot(x+1)\cdot(x+2) + B\cdot x\cdot(x+2) + C\cdot x\cdot(x+1)\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości $(\heartsuit)$, a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości $(\heartsuit)$ kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$1 = 2A, \quad \text{skąd} \quad A = \frac{1}{2}\,,$$

$$1 = -B, \quad \text{skąd} \quad B = -1\,,$$

$$1 = 2C, \quad \text{skąd} \quad C = \frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x} = \int\limits_1^6 \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}\,dx = \frac{\ln|x|}{2} - \ln|x+1| + \frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=1}^{6} =$$

$$= \frac{\ln 6}{2} - \ln 7 + \frac{\ln 8}{2} - \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} - \ln 7 + \frac{3\cdot\ln 2}{2} - 0 + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} =$$

$$= 3\cdot\ln 2 - \ln 7 = \ln 8 - \ln 7 = \ln\frac{8}{7}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln\frac{8}{7}$.

Zadanie **15. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x+1}, \qquad x=t^3-1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,7]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx=\int\limits_1^2 \frac{4\cdot(t^3-1)}{t^2}\,3t^2dt=12\cdot\int\limits_1^2 t^3-1\,dt=12\cdot\left(\frac{t^4}{4}-t\,\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$
$$=12\cdot\left(\frac{16-1}{4}-(2-1)\right)=12\cdot\left(\frac{15}{4}-\frac{4}{4}\right)=12\cdot\frac{11}{4}=33\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Big|_{x=0}^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0-0-\int\limits_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0\,,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x=t+\pi$, czyli $t=x-\pi$, otrzymujemy:

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos(t+\pi)\,dt = -\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos t\,dt = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt - \pi\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

Zadanie **17. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+1+1} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t=x-1, \qquad x=t+1$$

i formalnie

$$dx=dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=2$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0, 2]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1, 1]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+1} = \left(\operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1}^{1} \right) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\pi}{2}$.

Zadanie **18. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+1)} = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1|\,\Bigg|_{x=1}^{\infty} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\,\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{2} = \ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.