KOLOKWIUM nr 10,5, 12.05.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **16. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(7-\frac{6}{n}\right) \cdot \left(7+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(5-\frac{4}{n}\right) \cdot \left(5+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(5+\frac{6}{n}\right)} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 0}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} \geqslant \frac{(7n+1) \cdot (7n+8)}{(5n+1) \cdot (5n+6) \cdot (5n+11)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{7n-6}{5n-4} \geqslant \frac{7n+8}{5n+11}\,,$$

$$(7n-6) \cdot (5n+11) \geqslant (7n+8) \cdot (5n-4)\,,$$

$$35n^2+77n-30n-66 \geqslant 35n^2-28n+40n-32\,,$$

$$35n^2+47n-66 \geqslant 35n^2+12n-32\,,$$

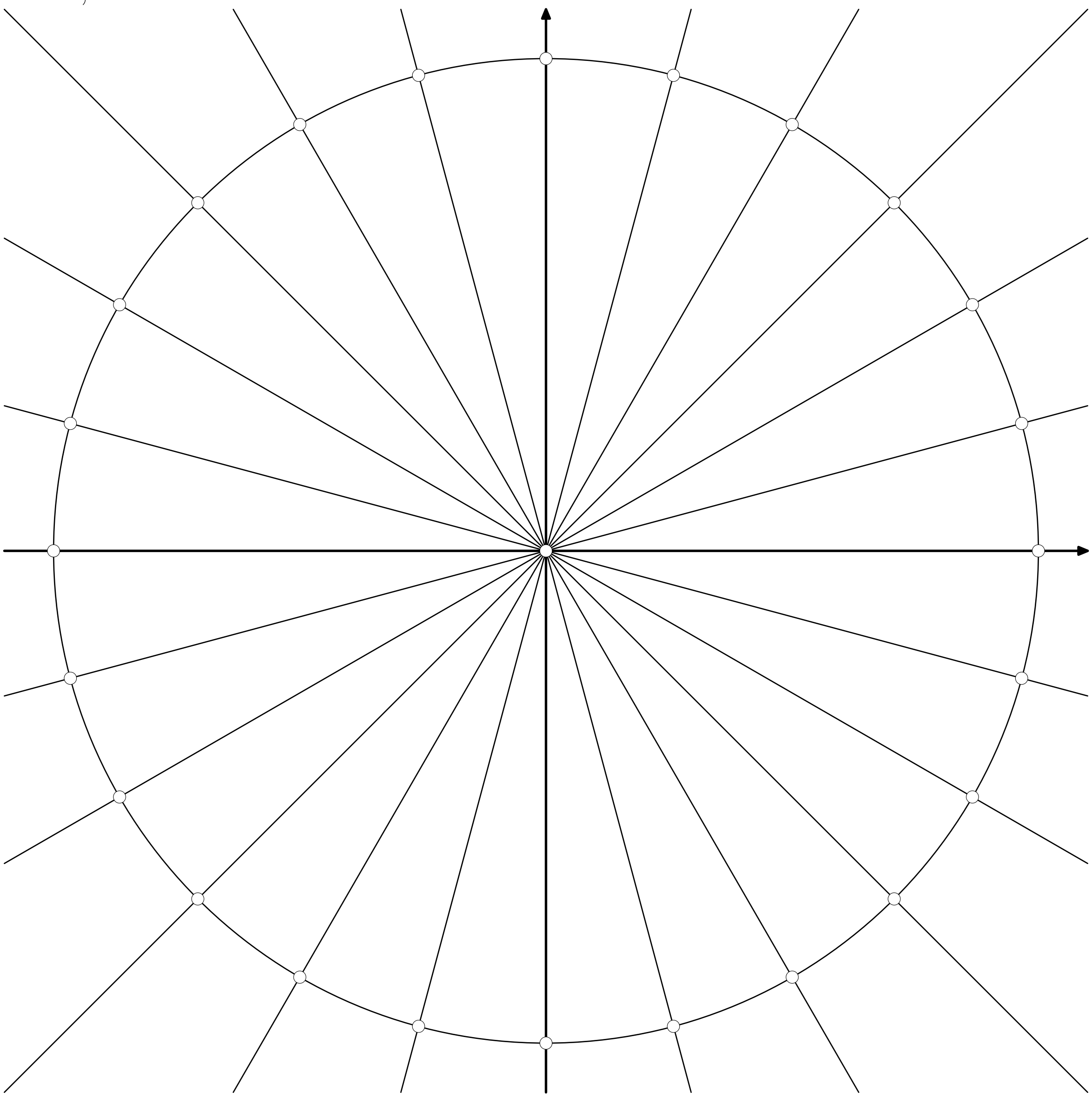
$$35n \geqslant 34\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie **17. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27}+z^{16}=z^{24}+z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków "$\pm$" i "$\pm_2$" dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Rozwiązanie:

Przekształcając dane równanie otrzymujemy kolejno:

$$z^{27}-z^{24}-z^{19}+z^{16}=0\,,$$

$$\left(z^3-1\right)\cdot z^{24}-\left(z^3-1\right)\cdot z^{16}=0\,,$$

$$\left(z^3-1\right)\cdot\left(z^{24}-z^{16}\right)=0\,,$$

$$\left(z^3-1\right)\cdot\left(z^8-1\right)\cdot z^{16}=0\,,$$

$$z^3=1 \quad \vee \quad z^8=1 \quad \vee \quad z=0\,.$$

Zatem dane równanie ma 11 rozwiązań i są to: liczba 0, osiem pierwiastków ósmego stopnia z jedności (w tym liczba 1) oraz dwa pierwiastki trzeciego stopnia z jedności (bez liczby 1, którą już uwzględniliśmy).

Odpowiedź:

Dane równanie ma 11 rozwiązań: 0, ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm_2\frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.