KOLOKWIUM nr 12, 9.06.2016, godz. 8.15-9.15

Zadanie **19.** **(10 punktów)** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}. \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(3n+3)! \cdot x^{n+1}}{(2n+2)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n^n}{(3n)! \cdot x^n}\right| = \frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot|x|}{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)} \to \frac{27\cdot|x|}{4\cdot e}$$

przy $n \to \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{27\cdot|x|}{4\cdot e}$.

Jeżeli $\frac{27\cdot|x|}{4\cdot e} < 1$, czyli $|x| < \frac{4e}{27}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27\cdot|x|}{4\cdot e} > 1$, czyli $|x| > \frac{4e}{27}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{4e}{27}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4e}{27}$.

Zadanie **20.** **(15 punktów)** Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^3-9x}=\frac{2x+3}{(x-3)\cdot x\cdot(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+3}\,,$$

$$2x+3=A\cdot x\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)\cdot(x+3)+C\cdot(x-3)\cdot x\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=3$, $x=0$, $x=-3$ otrzymując odpowiednio

$$9=18A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2}\,,$$

$$3=-9B, \quad \text{skąd} \quad B=-\frac{1}{3}\,,$$

$$-3=18C, \quad \text{skąd} \quad C=-\frac{1}{6}\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx=\int\limits_5^\infty \frac{1/2}{x-3}-\frac{1/3}{x}-\frac{1/6}{x+3}\,dx=\left.\frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\right|_{x=5}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\right)\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 8}{6}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 2}{2}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)+\frac{\ln 5}{3}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^3}{1+\frac{3}{x}}}\right)+\frac{\ln 5}{3}=\ln 1+\frac{\ln 5}{3}=0+\frac{\ln 5}{3}=\frac{\ln 5}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{3}$.