KOLOKWIUM nr 2, 10.03.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **2. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^4+x^2}=\frac{2x+3}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x}\,,$$

$$2x+3=(Ax+B)\cdot x^2+D\cdot\left(x^2+1\right)+E\cdot\left(x^2+1\right)\cdot x\,,$$

$$2x+3=Ax^3+Bx^2+Dx^2+D+Ex^3+Ex\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+E\\ 0 &= B+D\\ 2 &= E\\ 3 &= D\,, \end{cases}$$

skąd $A=-2$ i $B=-3$. W konsekwencji

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx=\int \frac{-2x}{x^2+1}-\frac{3}{x^2+1}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}\,dx=-\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arctg} x-\frac{3}{x}+2\ln|x|+C\,.$$

Zadanie **3. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,,$$

co daje

$$t^2=1+\sqrt{1+x}\,,$$
$$t^2-1=\sqrt{1+x}\,,$$
$$\left(t^2-1\right)^2=1+x\,,$$
$$\left(t^2-1\right)^2-1=x\,,$$
$$t^4-2t^2=x$$

i formalnie

$$4\cdot\left(t^3-t\right)\,dt=dx\,.$$

Otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\int \frac{4\cdot(t^3-t)\,dt}{1+t}=4\cdot\int t^2-t\,dt=\frac{4t^3}{3}-2t^2+C=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^2+C=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2-2\sqrt{1+x}+C=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+x}+C_2\,.$$