KOLOKWIUM nr 4, 24.03.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **5. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2+2x+4}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2+2x+4} = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2+2x+1+3} = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{(x+1)^2+3} = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{3\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+3},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t=\frac{x+1}{\sqrt{3}}, \qquad x=t\cdot\sqrt{3}-1$$

i formalnie

$$dx=\sqrt{3}\,dt.$$

Ponadto $x=-2$ odpowiada $t=-1/\sqrt{3}$, a $x=2$ odpowiada $t=\sqrt{3}$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-2,2]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1/\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{3\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+3} = \int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\left(t\cdot\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{3}\,dt}{3\cdot t^2+3} = \int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t\,dt}{t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \left(\left.\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}\right|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\left.\operatorname{arctg} t\right|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln(4/3)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku nie może pojawić się **arctg**, a $\boldsymbol{\pi}$ oraz **ln** mogą wystąpić tylko raz.

Uwaga do zadania 6: W prawidłowo uproszczonym wyniku **ln** może wystąpić tylko raz.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_{-2}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+2x+1}}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej, a następnie dzielimy przedział całkowania na dwa przedziały:

$$\int\limits_{-2}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+2x+1}}=\int\limits_{-2}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt[4]{(x+1)^2}}=\int\limits_{-2}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}}=$$

$$=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}}+\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}}=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{1+\sqrt{-x-1}}+\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\,. \qquad (\spadesuit)$$

W pierwszej całce ostatniej sumy wzoru ($\spadesuit$) wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{-x-1}, \qquad t^2=-x-1,\ \ t\geqslant 0, \qquad x=-t^2-1,\ \ t\geqslant 0$$

i formalnie

$$dx=-2t\,dt.$$

Ponadto $x=-2$ odpowiada $t=1$, a $x=-1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-2,-1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,1]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{1+\sqrt{-x-1}}=\int\limits_{1}^{0}\frac{-2t\,dt}{1+t}=-2\cdot\int\limits_{1}^{0}\frac{t\,dt}{1+t}=2\cdot\int\limits_{0}^{1}\frac{t+1-1}{1+t}\,dt=2\cdot\int\limits_{0}^{1}1-\frac{1}{1+t}\,dt=$$

$$=2\cdot\int\limits_{0}^{1}dt-2\cdot\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{1+t}=2-2\cdot\left(\ln|1+t|\Big|_{t=0}^{1}\right)=2-2\cdot(\ln 2-\ln 1)=2-2\cdot\ln 2\,.$$

Z kolei w drugiej całce ostatniej sumy wzoru ($\spadesuit$) wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{x+1}, \qquad t^2=x+1,\ \ t\geqslant 0, \qquad x=t^2-1,\ \ t\geqslant 0$$

i formalnie

$$dx=2t\,dt.$$

Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=8$ odpowiada $t=3$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,8]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,3]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\int\limits_{0}^{3}\frac{2t\,dt}{1+t}=2\cdot\int\limits_{0}^{3}\frac{t\,dt}{1+t}=2\cdot\int\limits_{0}^{3}\frac{t+1-1}{1+t}\,dt=2\cdot\int\limits_{0}^{3}1-\frac{1}{1+t}\,dt=$$

$$=2\cdot\int\limits_{0}^{3}dt-2\cdot\int\limits_{0}^{3}\frac{dt}{1+t}=6-2\cdot\left(\ln|1+t|\Big|_{t=0}^{3}\right)=6-2\cdot(\ln 4-\ln 1)=6-4\cdot\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $8-6\cdot\ln 2$.