KOLOKWIUM nr 51, 7.03.2016, godz. 14.15-15.00

Zadanie **51. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5+1}\, dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=4}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[7]{x^5+1}\,,$$

czyli

$$t^7=x^5+1$$

oraz formalnie

$$7t^6\,dt=5x^4\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^4 \cdot \sqrt[7]{x^5+1}\, dx=\frac{1}{5}\int \sqrt[7]{x^5+1}\cdot 5x^4\, dx=\frac{1}{5}\int t\cdot 7t^6\, dt=\frac{7}{5}\int t^7\, dt=\frac{7}{5}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{7\cdot t^8}{40}+C=$$

$$=\mathbf{\frac{7}{40}\cdot\left(x^5+1\right)^{8/7}+C\,.}$$

Zadanie **52. (10 punktów)**

Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x)=\cos^4 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

a ponadto $f(0)=f(\pi)=0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^4 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4=\frac{z^4+4z^2+6+4z^{-2}+z^{-4}}{16}=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\,.$$

W konsekwencji

$$f'(x)=\int\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\,dx=\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}+C$$

oraz

$$f(x)=\int\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}+C\,dx=-\frac{\cos 4x}{128}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{16}+Cx+D\,.$$

Z warunku $f(0)=0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+D=0\,,$$

skąd $\mathbf{D=17/128}$. Natomiast z warunku $f(\pi)=0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+\frac{3\pi^2}{16}+C\pi+\frac{17}{128}=0\,,$$

co daje $\mathbf{C=-3\boldsymbol{\pi}/16}$.

Szukana funkcja jest więc dana wzorem

$$\mathbf{f(x)=-\frac{\cos 4x}{128}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{16}-\frac{3\boldsymbol{\pi} x}{16}+\frac{17}{128}}\,,$$

a przy tym

$$\mathbf{f(2\boldsymbol{\pi})}=-\frac{\cos 8\pi}{128}-\frac{\cos 4\pi}{8}+\frac{3(2\pi)^2}{16}-\frac{3\pi(2\pi)}{16}+\frac{17}{128}=\mathbf{\frac{3\boldsymbol{\pi}^2}{8}}\,.$$