KOLOKWIUM nr 52, 14.03.2016, godz. 14.15-15.00

Zadanie **53. (10 punktów)**

Wyrazić całkę nieoznaczoną

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx$$

za pomocą $I_{n-1}(x)$.

Rozwiązanie:

Przyjęcie we wzorach

$$\int f'(x)\cdot\sin f(x)\,dx=-\cos f(x)+C$$

oraz

$$\int f'(x)\cdot\cos f(x)\,dx=\sin f(x)+C$$

funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ prowadzi odpowiednio do

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=-\cos\sqrt{x}+C$$

oraz

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=\sin\sqrt{x}+C\,.$$

W oparciu o powyższe wzory wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części (różniczkując pierwszy czynnik i całkując drugi):

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx=2\cdot\int x^{n+1/2}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=2\cdot x^{n+1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)-2\cdot\int\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x^{n-1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+(2n+1)\cdot\int x^{n-1/2}\cdot\cos\sqrt{x}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot\int x^n\cdot\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^n\cdot\sin\sqrt{x}-2\cdot(2n+1)\cdot\int n\cdot x^{n-1}\cdot\sin\sqrt{x}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^n\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$

Odpowiedź:

$$I_n(x)=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^n\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)=$$
$$=-2\cdot x^n\cdot\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^n\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$

Zadanie **54. (13 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}\,.$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^3\cdot(x+1)^2}}=\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

i wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\,,$$

czyli

$$t^5=1+\frac{1}{x}\,,$$

$$t^5-1=\frac{1}{x}$$

oraz formalnie

$$5t^4\,dt=-\frac{dx}{x^2}\,.$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}=-\int \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}\cdot\frac{-dx}{x^2}=-\int\frac{1}{t^2}\cdot 5t^4\,dt=-5\cdot\int t^2\,dt=-\frac{5\cdot t^3}{3}+C=$$

$$=-\frac{5}{3}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\right)^3+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/5}+C\,.$$