KOLOKWIUM nr 54, 4.04.2016, godz. 14.15-15.15

Zadanie **56.** **($\sqrt{144}$ punktów)** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{(x,y):\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s,0,0)$, gdzie

$$x_s=\frac{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}.$$

Obliczamy:

$$\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} x-x^3\,dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right|_{x=1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{324}=\frac{162-81-18+1}{324}=\frac{64}{324}=\frac{16}{81}$$

oraz

$$\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} 1-x^2\,dx=\left.x-\frac{x^3}{3}\right|_{x=1/3}^{1}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{81}=\frac{81-27-27+1}{81}=\frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s=\frac{16/81}{28/81}=\frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{4}{7},0,0\right)$.

Zadanie **57.** **($\sqrt{289}$ punktów)** Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}+\ldots+\sqrt[4]{k}+\ldots+\sqrt[4]{n-1}+\sqrt[4]{n}\right)^A}{\left(\sqrt[9]{1}+\sqrt[9]{2}+\sqrt[9]{3}+\sqrt[9]{4}+\ldots+\sqrt[9]{k}+\ldots+\sqrt[9]{n-1}+\sqrt[9]{n}\right)^B}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych wykładników całkowitych dodatnich A i B, aby granica ta była dodatnia i skończona. Zapisać wynik w postaci $10w^6$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:
Przekształcamy sumę występującą w liczniku ilorazu pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{k}=n^{5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k}{n}}=n^{5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt[4]{x}\,dx=\frac{4}{5}x^{5/4}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}n^{-5/4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{k}=\frac{4}{5}.$$

Podobnie postępujemy z sumą występującą w mianowniku:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[9]{k}=n^{10/9}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt[9]{\frac{k}{n}}=n^{10/9}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $g(x)=\sqrt[9]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\sqrt[9]{x}\,dx=\frac{9}{10}x^{10/9}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{9}{10}.$$

W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty}n^{-10/9}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt[9]{k}=\frac{9}{10}.$$

Teraz możemy przystąpić do obliczenia granicy danej w treści zadania:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{k}\right)^A}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[9]{k}\right)^B}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5A/4}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{k}\right)^A}{n^{-10B/9}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[9]{k}\right)^B}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{-5/4}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[4]{k}\right)^A}{\left(n^{-10/9}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[9]{k}\right)^B}=\frac{(4/5)^A}{(9/10)^B},$$

o ile $-5A/4=-10B/9$, czyli $A=8$ i $B=9$, skoro A i B mają być względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $\dfrac{2^{25}\cdot 5}{3^{18}}=10\cdot\left(\dfrac{16}{27}\right)^6$ dla $A=8$ i $B=9$.