## KOLOKWIUM nr 55, 11.04.2016, godz. 14.15-15.15

*Zadanie* **58.** **(10 punktów)** Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{-1}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2}dx$. Zapisać wynik jako liczbę wymierną.

*Rozwiązanie:*

Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0 (jeżeli z powodu niezauważenia tego faktu otrzymasz błędny wynik, nie dostaniesz za rozwiązanie więcej niż 5 punktów), podzielimy więc przedział całkowania na dwa przedziały, a w każdej z tak otrzymanych całek wykonamy podstawienie $t=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}$, które prowadzi do następujących obliczeń:

$$t^3=1+\frac{2}{x}, \qquad 3t^2\,dt=-\frac{2\,dx}{x^2}, \qquad \frac{1}{t^3}=\frac{x}{x+2}, \qquad \left(\frac{1}{t^3}\right)^2\cdot 3t^2\,dt=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2\cdot\frac{2\,dx}{x^2},$$

$$\frac{3\,dt}{t^4}=-\frac{2\,dx}{(x+2)^2}, \qquad -\frac{3\,dt}{2\cdot t^4}=\frac{dx}{(x+2)^2},$$

$$x\in(-1,0) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x}\in(-\infty,-1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x}\in(-\infty,-2) \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{2}{x}\in(-\infty,-1) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad t^3\in(-\infty,-1) \quad\Leftrightarrow\quad t\in(-\infty,-1),$$

$$x\in\left(0,\frac{1}{13}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x}\in(13,\infty) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x}\in(26,\infty) \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{2}{x}\in(27,\infty) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad t^3\in(27,\infty) \quad\Leftrightarrow\quad t\in(3,\infty),$$

$$\int\limits_{-1}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2}dx=\int\limits_{-1}^{0} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2}dx+\int\limits_{0}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}\cdot\frac{dx}{(x+2)^2}+\int\limits_{0}^{1/13}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}\cdot\frac{dx}{(x+2)^2}=\int\limits_{-1}^{-\infty}-\frac{3t\,dt}{2\cdot t^4}+\int\limits_{\infty}^{3}-\frac{3t\,dt}{2\cdot t^4}=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{3\,dt}{2\cdot t^3}+\int\limits_{3}^{\infty}\frac{3\,dt}{2\cdot t^3}=$$

$$=\left(-\frac{3}{4\cdot t^2}\Bigg|_{t=-\infty}^{-1}\right)+\left(-\frac{3}{4\cdot t^2}\Bigg|_{t=3}^{\infty}\right)=-\frac{3}{4\cdot(-1)^2}+\lim_{t\to-\infty}\frac{3}{4\cdot t^2}-\lim_{t\to\infty}\frac{3}{4\cdot t^2}+\frac{3}{4\cdot(3)^2}=$$

$$=-\frac{3}{4}+0+0+\frac{1}{12}=-\frac{2}{3}.$$

**Odpowiedź:** Podana całka ma wartość $-2/3$.

*Zadanie* **59. (22 punkty)** Udowodnić nierówności:

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2} < 0{,}009\,, \qquad \textbf{(4 punkty)}$$

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2} > 0{,}0089\,, \qquad \textbf{(6 punktów)}$$

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2} > 0{,}00895\,. \qquad \textbf{(12 punktów)}$$

*Rozwiązanie:*
Rozważmy całkę oznaczoną

$$\int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{x=100}^{1000} = -\frac{1}{1000} + \frac{1}{100} = \frac{9}{1000} = 0{,}009$$

oraz podział jej przedziału całkowania $[100, 1000]$ na 900 przedziałów długości 1.

**1**° Ponieważ funkcja podcałkowa jest malejąca, zachodzi nierówność

$$0{,}009 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^2} > \sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2}\,, \qquad \text{(suma wartości w prawych końcach)}$$

co stanowi nierówność za 4 punkty.

**2**° Z tego samego powodu zachodzi też nierówność

$$0{,}009 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{n^2}\,, \qquad \text{(suma wartości w lewych końcach)}$$

skąd otrzymujemy

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{10000} > 0{,}009 - \frac{1}{10000} = 0{,}0089\,,$$

co kończy dowód nierówności za 6 punktów.

**3**° Ponieważ funkcja podcałkowa jest wypukła, zachodzi nierówność wynikająca z metody trapezów:

$$0{,}009 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{20000} + \frac{1}{2000000}\,,$$

skąd

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{1000000} > 0{,}009 - \frac{1}{20000} - \frac{1}{2000000} + \frac{1}{1000000} =$$

$$= 0{,}009 - \frac{1}{20000} + \frac{1}{2000000} = 0{,}009 - 0{,}00005 + 0{,}0000005 = 0{,}0089505 > 0{,}00895\,,$$

co daje nierówność za 12 punktów.