KOLOKWIUM nr 56, 18.04.2016, godz. 14.15-15.00

Zadanie **60. (14 punktów)** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n}{n!} = b_n \,.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n} = \frac{a \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(n+1)^2 \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{a \cdot (2n+1) \cdot 2}{(n+1)} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 4ea$$

przy $n \to \infty$.

Jeżeli $4e \cdot a < 1$, czyli $a < 1/4e$, to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 < 1 \,,$$

wobec czego w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4e \cdot a > 1$, czyli $a > 1/4e$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Dany szereg jest zbieżny dla liczb dodatnich $a < \dfrac{1}{4e}$, a rozbieżny dla $a > \dfrac{1}{4e}$.

Zadanie **61.** **(21 punktów)** Dane są takie ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = 1$.

Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leqslant 1$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n < \infty \text{ za } \textbf{14 punktów}\right)$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n^2, a_n^2, a_n^2, b_n^3, b_n^3 i c_n^6 otrzymujemy

$$\sqrt[6]{a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot b_n^3 \cdot b_n^3 \cdot c_n^6} \leqslant \frac{a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + b_n^3 + b_n^3 + c_n^6}{6},$$

czyli

$$a_n b_n c_n \leqslant \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^3}{3} + \frac{c_n^6}{6}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^3}{3} + \frac{c_n^6}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.