KOLOKWIUM nr 57, 25.04.2016, godz. 14.15-15.00

Zadanie **62.** **(18 punktów)** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrosko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

Zadanie **63. (20 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{(x^2+2)\cdot\sin x}{x^3}\,dx$ lub wykazać, że jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy daną całkę na sumę dwóch całek:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{(x^2+2)\cdot\sin x}{x^3}\,dx=\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx+2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx\,,$$

przy czym zauważamy, że na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej i kryterium porównawczego druga całka jest zbieżna:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\,dx\leqslant\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx<+\infty\,.$$

Pamiętajmy, że suma całki zbieżnej i *jakiejś* jest *jakaś*, gdzie *jakaś* może równie dobrze oznaczać *zbieżna* jak i *rozbieżna.*

Całkujemy pierwszą całkę dwukrotnie przez części:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x\,dx=\frac{1}{x}\cdot(-\cos x)\Bigg|_{x=\pi/2}^{\infty}-\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{-1}{x^2}\cdot(-\cos x)\,dx=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(-\cos x)-\frac{1}{\pi/2}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\cos x\,dx=0-0-\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\cos x\,dx=$$

$$=-\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\cos x\,dx=-\frac{1}{x^2}\cdot\sin x\Bigg|_{x=\pi/2}^{\infty}+\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{-2}{x^3}\cdot\sin x\,dx=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\sin x\right)+\frac{1}{(\pi/2)^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx=0+\frac{4}{\pi^2}-2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}-2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx\,.$$

W konsekwencji:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{(x^2+2)\cdot\sin x}{x^3}\,dx=\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx+2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx=\left(\frac{4}{\pi^2}-2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx\right)+2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}-2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx+2\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx=\frac{4}{\pi^2}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $4/\pi^2$.