## KOLOKWIUM nr 58, 9.05.2016, godz. 14.15-15.15

*Zadanie* **64. (16 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{-x^2+4x+6}{(x-1)\cdot x\cdot (x+1)\cdot (x+2)}\,dx$.

Sprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych, szukając rozkładu postaci:

$$\frac{-x^2+4x+6}{(x-1)\cdot x\cdot (x+1)\cdot (x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}\,,$$

co po obustronnym przemożeniu przez wspólny mianownik prowadzi do

$$\begin{aligned} -x^2+4x+6 \;&=\; A\cdot x\cdot (x+1)\cdot (x+2) \;+\; B\cdot (x-1)\cdot (x+1)\cdot (x+2) \;+ \\ &+\; C\cdot (x-1)\cdot x\cdot (x+2) \;+\; D\cdot (x-1)\cdot x\cdot (x+1)\,. \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\clubsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi $A$, $B$, $C$, $D$.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\clubsuit$) kolejno $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$9=6A, \quad \text{skąd} \quad A=3/2\,,$$
$$6=-2B, \quad \text{skąd} \quad B=-3\,,$$
$$1=2C, \quad \text{skąd} \quad C=1/2\,,$$
$$-6=-6D, \quad \text{skąd} \quad D=1\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{-x^2+4x+6}{(x-1)\cdot x\cdot (x+1)\cdot (x+2)}\,dx = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{3/2}{x-1}-\frac{3}{x}+\frac{1/2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{3\cdot \ln|x-1|}{2} - 3\cdot \ln|x| + \frac{\ln|x+1|}{2} + \ln|x+2| \Bigg|_{x=\sqrt{2}}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\cdot \ln|x-1|}{2} - 3\cdot \ln|x| + \frac{\ln|x+1|}{2} + \ln|x+2|\right)\right) -$$

$$- \frac{3\cdot \ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} + 3\cdot \ln\sqrt{2} - \frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2} - \ln\left(\sqrt{2}+2\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln\frac{(x-1)^{3/2}\cdot (x+1)^{1/2}\cdot (x+2)}{x^3}\right) + \ln\frac{\sqrt{2}^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{3/2}\cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^{1/2}\cdot \left(\sqrt{2}+2\right)} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^{3/2}\cdot (x+1)^{1/2}\cdot (x+2)}{x^3}\right) + \ln\frac{\sqrt{2}^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{3/2}\cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^{1/2}\cdot \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} =$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)+\ln\frac{\sqrt{2}^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{3/2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{3/2}\cdot\sqrt{2}}=$$

$$=\ln 1+\ln\frac{\sqrt{2}^2}{\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^{3/2}}=0+\ln\frac{2}{1^{3/2}}=\ln 2\,.$$

**Odpowiedź:** Wartość podanej całki niewłaściwej jest równa $\ln 2$.

*Zadanie* **65. (25 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu $(a_n)$, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ są zbieżne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^5$ jest rozbieżny.

*Rozwiązanie:*

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg $(a_n)$ zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \frac{b_r}{\sqrt[5]{m}} \quad \text{dla} \quad m \in \mathbb{N}, \ \ r = 1, 2, 3, \ldots, k\,,$$

gdzie liczby $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ spełniają warunki

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots + b_k^3 = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

oraz

$$b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + \ldots + b_k^5 \neq 0\,. \qquad (\heartsuit)$$

Pozostaje więc skonstruować lub wskazać taki układ liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$.

*Konstrukcja:*

Załóżmy, że układ liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ składa się z $x$ jedynek, $y$ dwójek i $z$ trójek, przy czym dopuszczamy ujemne wartości $x$, $y$ i $z$ oznaczające odpowiednio $-x$ liczb $-1$, $-y$ liczb $-2$, $-z$ liczb $-3$. Wówczas równości $(\diamondsuit)$ przyjmują postać

$$x + 2y + 3z = x + 8y + 27z = 0\,,$$

skąd otrzymujemy $6y + 24z = 0$, możemy więc przyjąć $z = 1$ oraz $y = -4$. To prowadzi do $x = 5$. Zauważmy, że przy tym

$$x + 32y + 243z = 5 - 32 \cdot 4 + 243 \cdot 1 = 5 - 128 + 243 = 120\,,$$

skąd wynika warunek $(\heartsuit)$. W konsekwencji możemy przyjąć $k = 10$ oraz

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 1, \qquad b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = -2, \qquad b_{10} = 3\,.$$

*Wskazanie:*

Warunki $(\diamondsuit)$ i $(\heartsuit)$ są spełnione przez $k = 5$ oraz liczby

$$(b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4,\, b_5) = (1,\, 5,\, -7,\, -8,\, 9)\ ,$$

które można odczytać z pierwszej równości **Óadnych kfiatków XIV (⏢ Trapez 53).**